EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

46e jaargang
1970/1971
no 4
december

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Ch. Krijnen - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. D. N. van der Neut - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.

Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oestgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 15,— per verenigingsjaar.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 10,50. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

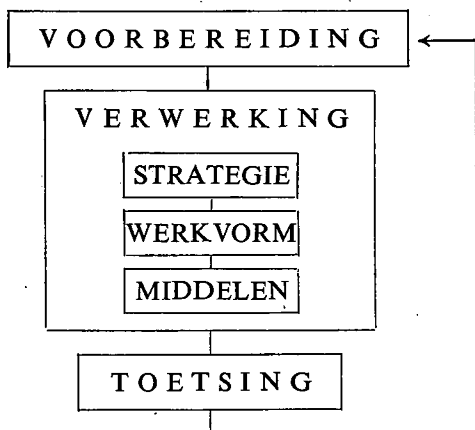
Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-29786-30785.

Naar een nieuw onderwijsprogramma voor wiskunde (vervolg[1])

Drs. J. v. DORMOLEN
Oegstgeest

3 Verwerking

3.0 Na de voorbereiding in de vorm van het vaststellen van de doelen in termen van gedrag komt de vraag op welke manier die doelen bereikt moeten worden. Ter beantwoording van deze vraag moeten hier naar mijn mening drie beslissingen genomen worden: keuze van de *strategie*, keuze van de *werkvorm*, en tenslotte de keuze van de *hulpmiddelen*.



De strategie omvat de te volgen procedure voor het aanbrengen van kennis en vaardigheden (zie verder 3.1).

De werkvorm omvat de bij die procedure gevolgde methode van communicatie (zoals bijvoorbeeld: voordracht, leergesprek, discussie, geprogrammeerde instructie) (zie 3.2). De keuze van de werkvorm is in hoge mate afhankelijk van de gekozen strategie. Wat niet wil zeggen, dat men een eenmaal gekozen strategie niet zou kunnen en moeten wijzigen als er geen geschikte werkvorm bij te vinden is.

[1] Het eerste deel in Euclides, 46, 1970–71, p. 1–11.

Met de hulpmiddelen worden de materiële voorzieningen bedoeld. De keuze ervan hangt vanzelfsprekend af van de gekozen strategie en werkvorm. (Zie 3.3). Zo zal men bijvoorbeeld een belangrijk hulpmiddel als het schoolboek pas kiezen als men het eens is met de daarin gevolgde strategieën en men van oordeel is dat dat bepaalde boek het beste past bij de gewenste werkvorm.

3.1 Strategie

3.10 Om duidelijk te maken wat ik met strategie bedoel, geef ik er een drietal voorbeelden van.

Eerste voorbeeld: *congruentie.*
In het oude leerplan werden congruenties beschouwd als relaties tussen figuren, terwijl we in het nieuwe leerplan congruenties liever als afbeeldingen van het platte vlak in zichzelf willen beschouwen. Ziehier al twee verschillende strategieën.
Verder, als we congruenties beschouwen als afbeeldingen, dan kunnen we ook weer op verschillende manieren tot dat congruentiebegrip geraken. Eén manier is uit te gaan van spiegelingen, vervolgens door samenstelling van twee spiegelingen te komen tot rotaties en translaties, om tenslotte door samenstellingen van spiegelingen, rotaties en translaties het algemene begrip congruentie te behandelen. Een andere manier is de spiegelingen, de rotaties en de translaties in het begin als drie gescheiden afbeeldingen te behandelen, vervolgens samenstellingen te onderzoeken, waardoor enerzijds aangetoond wordt dat elke rotatie en elke translatie op te vatten is als de samenstelling van twee spiegelingen, anderzijds congruenties onderzocht kunnen worden.

Tweede voorbeeld: *limieten en continuïteit.*
In één strategie worden limieten gedefinieerd met behulp van continuiteit en in een andere strategie is het net andersom.

Derde voorbeeld: *verzamelingen.*
In één strategie begint men zijn onderwijs met een inleiding over verzamelingen, geeft vele voorbeelden ook buiten de wiskunde en behandelt alle voorkomende begrippen zoals element, deelverzameling, doorsnede, vereniging, cartesisch produkt. In een andere strategie behandelt men slechts die begrippen die men op een bepaald moment nodig meent te hebben en spreekt men alleen in wiskundige termen, zonder voorbeelden 'uit het dagelijks leven'.

Zo zijn er bij vrijwel elk onderdeeltje van ons programma verschillende strategieën te bedenken: vrije of vaste vectoren; graden of radialen, of geen van beide; logaritme als functie of als naam van een getal; de substitutie- of de optel-aftrekmethode bij het oplossen van twee lineaire vergelijkingen met twee onbe-

kenden; computerkunde in het wiskundeonderwijs geïntegreerd of als afzonderlijk vak; wel of geen y-as; enz., enz., enz. Vele andere voorbeelden zijn o.a. te vinden in alle jaargangen van Euclides, in Wansink [8] en door het vergelijken van schoolboeken.

3.11 Wat zijn de kriteria bij het kiezen van een bepaalde strategie? Vaak is het enige kriterium onze persoonlijke voorkeur. Daar is niets tegen, maar we zullen die voorkeur wel rationeel moeten verklaren. Hier volgen een paar kriteria (naar Johnson en Rising [1]):

a De strategie moet *mathematisch correct* zijn. Dit lijkt op het intrappen van een open deur, maar dat is het niet. Er wordt vaak tegen gezondigd. Bijvoorbeeld als men gelooft dat een (schijnbaar) populaire uiteenzetting beter begrepen wordt. Men bereikt daar echter maar een tijdelijk doel mee en legt barrières voor later. Nog afgezien van het feit dat wat fout is nimmer goedgepraat kan worden (zie Freudenthal [9]: '. . . een drogredenering is voor elke leeftijd een drogredenering'.) Een bekend voorbeeld is: 'Drie *a* plus vijf *a* is acht *a*, want drie appels plus vijf appels is acht appels'. Hiermee wordt wel bereikt dat leerlingen vlot sommetjes kunnen maken zoals $4p+12p$, maar men blokkeert ermee dat zij p als variabele leren zien, waarvoor men elk getal, maar geen appels mag invullen.
Een ander voorbeeld van een incorrecte strategie werd onlangs door Maassen gegeven [10].

b De strategie moet voor de leerlingen *betekenis* hebben. Dat wil zeggen dat bij de ontwikkeling van een nieuw begrip, een nieuwe theorie, een nieuw rekenproces, alleen gebruik gemaakt mag worden van bekende begrippen en stellingen. Dus niet nu even gauw iets uitleggen omdat het straks nodig is.

c De strategie moet voldoen aan de eisen van een *goed onderwijsproces* (zie 3.22). Zo zal bijvoorbeeld een strategie die uitgaat van generalisaties en daaruit bijzondere voorbeelden afleidt in het algemeen te verwerpen zijn. Het is doorgaans beter de leerlingen door het onderzoeken van verschillende voorbeelden zelf op het spoor te laten komen van een algemeen principe.

d De strategie moet voldoen aan een *behoefte*. De leerlingen moeten het probleem kennen. Zij moeten nieuwsgierig gemaakt worden. Zo is bijvoorbeeld het stellen van de vraag naar het product van 16 en 8 minder geschikt als inleiding op de logaritme dan de vraag naar het product van 3^{31} en 3^{28}.

e De strategie moet *voorbereiden* op de toekomst. Door een verkeerd gekozen strategie kunnen leerlingen op een dood spoor raken. Bekend is het voorbeeld van de oplossingsmethode van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden. De zogenaamde optelaftrekmethode voert sneller naar het doel dan de zogenaamde substitutiemethode. Toch is de tweede te prefereren omdat die methode ook bruikbaar is bij niet-lineaire vergelijkingen. Iedere leraar die

de eerste methode intensief heeft ingetraind, zonder veel aandacht aan de tweede te schenken, kent de fouten die leerlingen maken als zij een stelsel als $x+y = 5$, $x^2+y^2 = 13$ moeten gaan oplossen.

3.12 Dat de keuze van strategieën in het werkplan van de didactiekcommissie pas in fase III aan de orde komt is begrijpelijk, omdat de keuze sterk afhangt van de gestelde doelen. En die worden eerst in fase II vastgesteld. Dat wil natuurlijk niet zeggen dat degenen die zich met de inventarisatie van leerstofgebieden gaan bezighouden niet tevens alvast over de mogelijke strategieën mogen gaan nadenken. Integendeel.

3.2 Werkvormen

Bij de keuze van de strategie is nog niet de vraag aan de orde gekomen op welke manier de leerling in contact gebracht zal worden met de leerstof.
Voor de verschillende manieren waarop dat kan gebeuren gebruikt men tegenwoordig algemeen de term: didactische werkvormen. Dat de vraag naar de didactische werkvorm pas in dat stadium van het onderwijsprogramma aan de orde komt is niet zo vreemd. De keuze van een bepaalde werkvorm hangt sterk af van de gekozen strategie. Dus eerst moeten strategieën vastgesteld worden.

Er bestaat niet zoiets als de beste werkvorm. Sommige werkvormen zijn in bepaalde omstandigheden beter, en in andere omstandigheden minder geschikt dan andere werkvormen. De leraar kiest de werkvorm die in een bepaalde situatie het meest geschikt lijkt.

Ik wil hier nu wel een paar werkvormen noemen, maar doe het zeer schetsmatig, en onvolledig. Aan de didactiekcommissie de taak een volledig (althans een zo volledig mogelijk) overzicht te maken.

3.21

a *Voordracht*: de leraar houdt een betoog, dat goed is opgebouwd en waar de klas geboeid naar zit te luisteren.

b *Leergesprek*: de leraar stelt vragen, lokt vragen en opmerkingen uit, geeft korte toelichtingen, vraagt en geeft toepasselijke voorbeelden.

c *Discussieles*: de leraar stelt een probleem dat de klas als groep moet oplossen. Zij kunnen daar onderling over discussiëren en kunnen de leraar weinig informatie vragen. De leraar zal hoofdzakelijk antwoorden geven zoals: 'Ja', 'Nee', 'Ik weet het niet', 'Dat wou ik jullie nu juist laten beslissen'.

d *Prakticum*: leerlingen krijgen een serie korte opdrachten. Zij krijgen een

minimum aan informatie, en er wordt van hen verwacht dat zij door het uitvoeren van die opdrachten en aan de hand van het verstrekte materiaal zelf een wetmatigheid, een begrip, een proces ontdekken.
Zij kunnen dat individueel doen. Dat wil niet zeggen dat er niet over het probleem overlegd mag worden, maar wel dat elke leerling alleen verantwoordelijk is voor het resultaat.
Zij kunnen de opdrachten ook zodanig in samenwerking met anderen uit te voeren krijgen dat zij gezamenlijk met die anderen voor het resultaat verantwoordelijk zijn. In dat geval spreekt men van groepswerk.

e *Geprogrammeerde instructie.*

f *Computergestuurde instructie.*

Leraren moeten de verschillende werkvormen met hun toepassingsgebied, hun voor- en nadelen kennen om er een opzettelijke keuze uit te kunnen doen.
Ik gaf hierboven als mijn mening dat de keuze van de werkvorm afhankelijk is van de gekozen strategie. Dat wil niet zeggen dat men bij het vaststellen van een strategie niet naar een gewenste werkvorm toe zou kunnen werken. Ik zou me kunnen voorstellen dat er voor een bepaald stukje leerstof twee strategieën bedacht worden, die beide even goed aan de kriteria voldoen. De ene strategie vraagt om een geprogrammeerde instructie als best passende werkvorm en de andere om groepswerk. Men zou dan bijvoorbeeld op pedagogische gronden het groepswerk kunnen kiezen. (Jammer genoeg liggen de zaken gewoonlijk niet zo eenvoudig als in dit voorbeeld.)

3.22 Hoe verschillend de diverse werkvormen ook zijn, bij zorgvuldige analyse blijkt dat zij allen volgens een bepaald patroon zijn opgebouwd. Over dat patroon zou ik hier nog een paar woorden willen zeggen. (Zie ook Johnson [1], p. 50 e.v. en DeCecco [3], hoofdstuk 10.)
In principe behoort elke leereenheid, of dat nu een heel lesuur, een gedeelte ervan, of een serie lesuren is, achtereenvolgens de volgende elementen te bevatten.

a Een *waarnemingsfase* waarin de leerlingen het probleem leren kennen en de voor dat probleem belangrijke leerstof herhalen.

b Een *sorteerfase* waarin de leerlingen een aantal voorbeelden te onderzoeken krijgen. Zij gaan ontdekken dat in die voorbeelden bepaalde gemeenschappelijke kenmerken aanwezig zijn (positieve voorbeelden) of ontbreken (negatieve voorbeelden).

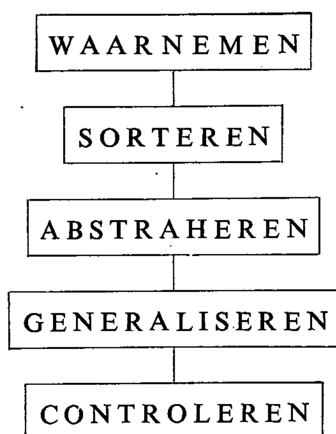
c Een *abstractiefase* waarin de leerlingen aan de hand van een nieuw voorbeeld kunnen demonstreren dat zij inderdaad tijdens de vorige fase een bepaalde wetmatigheid, een nieuw begrip, een onbekend proces hebben ontdekt. Dat zij dit aan de hand van een nieuw voorbeeld moeten doen is omdat zij gewoonlijk

nog niet in staat zijn hun ontdekking onder woorden te brengen of in een formule op te schrijven.

d Een *generalisatiefase* waarin van de leerlingen verlangd wordt onder woorden te brengen wat zij hebben ontdekt. In plaats van het onder woorden brengen is het ook mogelijk dat zij een algemene formule moeten geven.

e De leereenheid eindigt met de *controlefase* waarin een bewijs gegeven moet worden, de proef op de som genomen moet worden, een proces ingeoefend moet worden en de hoofdzaken samengevat moeten worden. Met deze controle wordt niet bedoeld de evaluatie waarbij de leerlingen op hun kennis en begrip getest worden. Dat is iets wat voortdurend tijdens het leerproces moet gebeuren en soms ook nog nadat het gehele proces achter de rug is.

Hieronder wordt het leerproces nog eens schematisch weergegeven:



Een kort voorbeeld in telegramstijl: Het vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal.
Waarnemingsfase: Herhalen van de betekenis van symbolen als 2^{73}, 3^{51}, 5^{88} enz. Probleemstelling in de vorm van de vraag naar vereenvoudiging van uitdrukkingen zoals $2^{73} \cdot 2^{88}$, $53^{8} \cdot 53^{5}$ enz. (Tussenopmerking: het gebruiken van relatief grote getallen is bewust. Bij 'eenvoudige' getallen gaan de kinderen rekenen, waardoor de probleemstelling verdoezeld wordt. Zij zien dan niet in dat er een probleem bestaat.)
Sorteerfase: Het schrijven als macht van uitdrukkingen als $17^{3} \cdot 17^{2}$, $23^{4} \cdot 23^{4}$, $317^{5} \cdot 317^{2}$ met behulp van de betekenis van de gebruikte symbolen. Hierdoor op het spoor komen van een regel. Lukt het ook met $17^{2} \cdot 19^{3}$ (negatief voorbeeld)?
Abstractiefase: Die regel toepassen op de oorspronkelijke vraag: het vereenvoudigen van $2^{73} \cdot 2^{88}$ en $53^{8} \cdot 53^{5}$. Hierbij moet een redenering gegeven worden die de juistheid van het resultaat motiveert.
Generalisatiefase: Het formuleren van de algemene stelling.

Controlefase: Het geven van een redenering waarmee die stelling plausibel gemaakt wordt en enige oefening in het toepassen ervan.
Ik geloof nogal in dit schema, al valt het me soms moeilijk de verschillende fasen uit elkaar te houden. Vaak gaan ze ongemerkt in elkaar over. Bij de ene leerling vlugger dan bij de andere. Uit analyse van eigen en geobserveerde lessen heb ik vaak ondervonden dat het slagen of mislukken ervan sterk verband houdt met het volgen of niet volgen van dit schema. Ik heb vele malen redelijk goede proeflessen van hospitanten zien mislukken omdat een van de verschillende fasen niet voldoende uitgewerkt was of zelfs werd overgeslagen. Meestal was dat de abstractiefase. Diverse malen konden we daardoor op de minuut nauwkeurig aanwijzen op welk moment ordeproblemen begonnen te komen. Ook in het werkplan van de didactiekcommissie zijn dezelfde fasen te herkennen, al hebben ze daar andere namen. Alleen de eerste fase, waarnemen, ontbreekt. Dat komt omdat die al achter de rug is en afgesloten werd met het stuk van Broekman [11].

3.3 Hulpmiddelen

Bij elke werkvorm behoort een pakket hulpmiddelen. Het is duidelijk dat de keuze van de hulpmiddelen afhankelijk van de werkvorm behoort te zijn en niet omgekeerd. Het is onjuist om bijvoorbeeld een overhead-projector te gaan gebruiken omdat de school er toevallig juist een heeft aangeschaft. Anders wordt het als men zich zorgvuldig gaat afvragen of met een werkvorm waarbij een overhead-projector een rol speelt bepaalde doelstellingen beter bereikt kunnen worden dan met andere werkvormen.
Hetzelfde geldt voor andere hulpmiddelen, en wel in hoge mate voor het schoolboek. De keuze van een schoolboek zou in principe bepaald moeten worden doordat men zich als team van wiskundeleraren van eenzelfde school, of groep van scholen, kan verenigen met de daarin gevolgde strategieën en de mogelijkheid daarbij passende werkvormen te gebruiken. (Dat het in de praktijk om allerlei redenen noodgedwongen anders is, weet ik ook wel.) Behalve overhead-projector en schoolboek zijn er natuurlijk nog vele andere hulpmiddelen: bord, kleurkrijt, liniaal, passer, schrift, stem en gebaar, demonstratiemodel van rekenliniaal, lusfilmprojector, enz., enz.
Ik heb zo maar het een en ander aan hulpmiddelen opgenoemd wat me te binnen schoot. Het is hier niet de plaats de voor- en nadelen en de mogelijkheden van alle hulpmiddelen te gaan behandelen. Afgezien van de vraag of ik dat wel zou kunnen, zou ik daarmee het doel van dit artikel voorbijschieten.

4 Toetsing

De toetsing dient om te controleren of de gestelde operationele doelen bereikt

zijn. Zou dat niet het geval zijn, dan moeten we vrijwel van voren af aan beginnen om na te gaan waar de fout zit. Is het gevraagde niveau te hoog (specifieke doelen)? Zijn de operationele doelen niet in overeenstemming met de specifieke? Voldoet de gekozen strategie niet aan alle kriteria? Of is de werkvorm verkeerd gekozen? Hebben de leerlingen geen geschikte hulpmiddelen of niet voldoende oefenmateriaal gekregen? En tenslotte: is misschien de toets verkeerd?
Worden er wel de bedoelde operationele doelen mee gemeten? Zo nee, waarom dan niet? Heb ik niet de geschikte toetsingsmethode gevonden? Heb ik wel een geschikte toetsingsmethode gevonden, maar heb ik hem verkeerd gebruikt? Over deze en andere problemen die met de toetsing verband houden is veel en deskundig geschreven (zie bijv. De Groot e.a., [12]). Dat is dan ook de reden dat ik er hier niet verder over uit zal weiden.

5 Daarmee ben ik aan het slot van dit artikel gekomen, dat ten doel had een globaal overzicht te geven van een (voorbeeld van een) onderwijsprogramma voor wiskunde, en daarmee een motivatie van een in principe door de didactiekcommissie aangenomen werkplan.
Misschien hebt u, geachte lezer, als u de moeite hebt genomen tot hier door te lezen, een gevoel van teleurstelling omdat alles zo schematisch en globaal gebleven is. Of omdat alles wat ik schreef ouwe koek is. In het eerste geval moet ik herhalen dat ik bewust alleen maar een globaal overzicht heb willen geven. Voor een gedetailleerd uitgewerkt werkplan is in Euclides geen plaats, en zelfs als dat wel het geval zou zijn, zou de artikelvorm niet de goede didactische werkvorm zijn.
Als het ouwe koek voor u is wens ik u geluk. Maar ik ben bang dat dat niet het geval is met alle lezers, want anders had de redactie van Euclides dit artikel niet opgenomen.
Het is het waarschijnlijkst dat het u bij het lezen vergaan is als zovele anderen, mezelf incluis, bij het lezen van en horen over didactische kwesties: eigenlijk wist u het wel, maar u was het uzelf niet zo bewust. En daarmee kom ik tot de kern van de taak die naar mijn mening de didactiekcommissie zich heeft gesteld: het bieden van mogelijkheden om wiskundeleraren bewust te maken van de opbouw van een onderwijsprogramma. Dat betekent dat er ook een onderwijsprogramma moet komen, want dat is er op het moment niet. Maar het gaat vooral om die bewustwording. Pas dan kan een leraar een verstandige keuze doen bij het voorbereiden van zijn lessen. Dit is het moment om Perquin [13] te citeren (p. 12), die schreef, dat het bij de didactiek gaat om '... de bestudering van de *opzettelijke* (cursivering van Perquin) leiding bij de ontwikkeling van lichaam en geest, en dan slechts in zoverre deze leiding *systematisch* (cursivering van mij, JvD) en langdurig plaats vindt, wat weer met zich meebrengt, dat zij door vakkundigen en als regel in bepaalde inrichtingen plaats vindt'.
Met het woord opzettelijk bedoelt Perquin, dat de leraar weet wat hij aan het

doen is, en waarom hij het zo en niet anders doet. En om het opzettelijk te doen zal hij het systematisch moeten doen.
Hopelijk heeft dit artikel een bijdrage tot die systematiek geleverd.

LITERATUUR (vervolg)

[8] Wansink, Didactische oriëntatie voor wiskundeleraren, 3 dln. (Wolters-Noordhoff, Groningen.)
[9] Freudenthal, Verzamelingen in het onderwijs, Euclides 45, 1969/1970, p. 321 e.v.
[10] Maassen, Afgeleide en monotonie, Korrel CLX, Euclides 45, 1969/1970, p. 337 e.v.
[11] Broekman, Didactiekcommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, Euclides 46, 1970/1971, p. 8 e.v.
[12] A. D. de Groot en R. F. van Naerssen, Studietoetsen (Mouton, Den Haag 1969).
[13] Perquin, Algemene didactiek (Romein en Zn., Roermond-Maaseik, 1964).

Kalender

wo 16 december: MC (2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O) 20.00 uur: In de serie 'Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht', Prof. Dr. E. W. Dijkstra over 'Bewijsbaarheid van programmacorrectheid'.

za 19 december: Jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren in het Transitorium, de Uithof, Utrecht. Aanvang 10.30 uur. Agenda op blz. 153 in dit nummer.

za 2 januari: Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap in de Katholieke Hogeschool, Hogeschoollaan 225, Tilburg. Aanvang 10.15 uur. Thema „Topologie". Sprekers Prof. Dr. W. T. van Est, Dr. J. M. Aarts, Dr. S. Th. M. Ackermans. Aanmelden (vóór 19 dec.) bij Dr. H. P. J. v. d. Kerkhof, Boslaan 25, Vught. Voor lunch f 5,00 storten op diens postrekening 1125209

za 9 januari: Teleac; 1e uitzending van cursus „Van oppervlakte naar integraal" door Prof. Dr. J. C. H. Gerretsen. Aanvang 9.30 uur - Ned 1.

Commissie modernisering leerplan wiskunde

In leerplannen van de diverse scholen voor voortgezet onderwijs wordt met betrekking tot de wiskunde het onderdeel statistiek met name genoemd.

In februari 1967 werd een rapport uitgebracht aan de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde over de wenselijkheid en mogelijkheid van het invoeren van statistiek in het onderwijs voor mavo, havo en vwo, door een werkgroep bestaande uit Prof. Dr. J. Hemelrijk, Prof. Dr. J. W. Sieben, Dr. W. P. van Zwet en Drs. J. Wessels. Mede op basis van de conclusies uit dit rapport worden in het juist aangevangen schooljaar 1970/71 door de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde cursussen statistiek voor leraren mavo en lbo georganiseerd.

In 25 plaatsen over het gehele land verspreid worden in totaal 31 cursussen verzorgd door meer dan 90 docenten uit het vwo. De Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde hoopt hierdoor te bereiken dat de cursisten, in totaal 1500 leraren uit het mavo en het lbo, geïnformeerd worden over het onderwerp statistiek. Uiteraard heeft het geven van achtergrondkennis in deze cursussen prioriteit gekregen. Er zal echter, voorlopig nog op bescheiden schaal, gezocht worden naar mogelijkheden om de didactische begeleiding betreffende stofomschrijving, doelstellingen, werkvormen en toetsing in de cursussen te integreren.

De aanbieding van de stof geschiedt in deze cursussen door middel van colleges en practica gedurende 20 middagen/avonden van elk $2\frac{1}{2}$ uur.
Tijdens de eerste middag/avond staat in elk schoolgebouw een computer-terminal Honeywell van Bull General Electric ter beschikking van de cursisten, niet alleen om snel de te meten waarnemingen omtrent lengte, gewicht, schoenmaat en leeftijd van de cursisten te kunnen verwerken, maar vooral ook om de leraren te laten kennismaken met het verschijnsel computer en time-sharing.

Naast deze cursussen statistiek organiseert de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde nog in het komende schooljaar 14 cursussen basisbegrippen van de wiskunde voor leraren bij het mavo en het lbo.

10 cursussen voor leraren vwo over onderwerpen als

- meetkunde met vectoren
- computerkunde
- waarschijnlijkheidsrekening en statistiek
- toegepaste wiskunde
- onderwerpen uit de analyse

2 experimentele cursussen computerkunde voor leraren mavo en lbo.

3 cursussen voor leraren hoger beroepsonderwijs over lineaire algebra en numerieke toepassingen daarvan.

Voor het jaar 1971/72 staat uitbreiding van de activiteiten in de richting van nijverheidsonderwijs en diverse vormen van beroepsonderwijs op het programma.

Uitvoeriger informatie wordt u gaarne verstrekt door de C.M.L.W. Universiteitscentrum De Uithof, Budapestlaan 6 te Utrecht. Tel. 030-539111, toestel 1530.

Soroban contra minicomputer

door

L. van den BROM

Amsterdam

Opgedragen aan Dr. H. Mooij, de zeventigjarige.

1 Het ontstaan van een positionele schrijfwijze voor getallen is een belangrijke bijdrage geweest in de ontwikkeling van de mensheid. Die positionele schrijfwijze voor getallen zou men zelfs belangrijker kunnen vinden dan bijvoorbeeld de relativiteitstheorie of de differentiaalrekening . . ., zo het zinvol zou zijn een dergelijke vergelijking te maken.
Voor het tellen en voor het systeem van maten en gewichten maakt de mens reeds meer dan 5000 jaren gebruik van de bundeling van een aantal lagere eenheden tot een nieuwe, volgende, hogere eenheid. Dat bundelen maakt het mogelijk om met een beperkt aantal basis-telwoorden zeer grote aantallen af te tellen. Ook geeft het ons de mogelijkheid om voor het opmeten van een lengte, een volume of een gewicht, een aan de te meten grootheid aangepaste maateenheid te kiezen. (Een melkboer met een mudmaat zal zich even ongelukkig voelen als een kolenboer met een pintmaat.)
De praktijk van het dagelijkse leven dwong bij het tellen, en bij het systeem van maten en gewichten, tot het bundelen tot een hogere eenheid. Wel zij opgemerkt, dat het gerechtvaardigd is te veronderstellen, dat bij de maten en gewichten, het proces ook omgekeerd heeft plaatsgevonden. Zo kreeg men, bij het in gebruik komen van de edele metalen, de behoefte aan kleinere gewichten, die dan uit praktische overwegingen zo gekozen waren, dat een geheel veelvoud ervan gelijk was aan een reeds in gebruik zijnd groter gewicht. Naast bundeling dus ook ontbundeling!

Als bundelgetallen zijn in verschillende tijden en bij verschillende volkeren uiteenlopende getallen gebruikt. Daarbij zien we wel de 10-bundeling prevaleren; en het is zeker niet te gewaagd te veronderstellen, dat het tellen op – of met gebruikmaking van – de vingers die 10-bundeling gestimuleerd heeft.
Van andere bundelgetallen leven nog tot op de huidige dag voort: 12, in ons dozijn en gros; 20, in quatre-vingt; 60, in de onderverdelingen van graad en

minuut. Dat ook wel bij het bundelen treden van verschillende hoogte na elkaar gebruikt werden, zien we aan het – nu pas tot verdwijnen gedoemde – niet-decimale engelse muntstelsel. (12 pence = 1 shilling; 20 shilling = 1 pound.)

2 Aan de positionele schrijfwijze van de getallen gaat noodzakelijker wijze de idee van het bundelen vooraf. Het bundelen tot een hogere eenheid hoeft echter geen onmiddellijke aanleiding te zijn voor het ontstaan van een positionele schrijfwijze voor de getallen. Dat kan men afleiden uit het feit, dat de Egyptenaren gedurende minstens de drie millennia voorafgaande aan het begin van onze jaartelling in het bezit waren van een consequente additieve 10-bundeling voor het schrijven van de getallen, maar niet tot de ontwikkeling van een positionele schrijfwijze kwamen. Mogelijker wijze is een rem op die ontwikkeling geweest dat de Egyptenaar voor iedere volgende 10-bundel een naar de vorm nieuw symbool gebruikte, in tegenstelling tot de Soemeriër, die twee symbool-vormen gebruikte in verschillende grootten en combinaties.

Bij die Soemeriërs, die leefden in het Zuiden van Mesopotamië, komt dan een 60-tallig positiestelsel tot ontwikkeling, dat ten tijde van de Semitisch-Akkadische overheersing (ca. 2250–ca. 2000 v. Chr.) voor wetenschappelijk gebruik door geheel Babylonië wordt overgenomen. Over het ontstaan van het 60-tallige positiestelsel – dat teruggaat tot omstreeks het midden van het 4e millennium v. Chr. – heeft men verschillende hypothesen geuit, die geen van alle onomstotelijk ondersteund worden door historische documenten. Bijvoorbeeld:

a 60 werd uitverkozen als basis-getal vanwege de gunstige deelbaarheidseigenschappen in het sexagesimale systeem.

b Het dubbele van een maandrantsoen, voor 30 dagen, werd allengs de eenheid van de voedselverdeling.

c Het 60-systeem vond zijn ontstaan bij het versmelten van twee volkeren, waarvan het ene zich bediende van een 10-systeem en het andere een 6-systeem gebruikte.

d Het tellen met de vingers als intermediaire telobjecten kan aanleiding geven tot de basis- resp. bundelgetallen: 5, 6, 10, 11, 25, 30, 36, *60* en 66 [1].

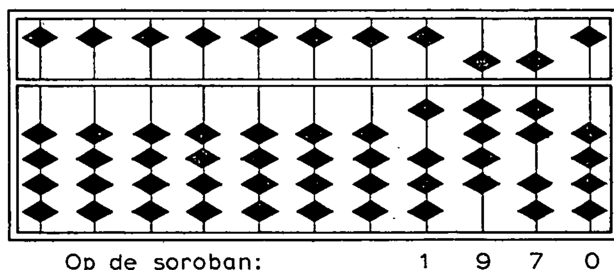
Hoe het dan ook zij, de Babyloniër bediende zich zeker vanaf omstreeks 2250 v. Chr. van een 60-tallig positiestelsel, waarin de cijfers 10-bundelend werden geschreven: een 'spijker', ∇, voor één en een 'winkelhaak', ≺, voor tien.

3 De Grieken daarentegen schreven de getallen met behulp van de letters van het alfabet op een manier die nu niet bepaald het rekenen met enig schrijfgerei bevorderde; en evenals de Romeinen – wier getallenschrift ook niet uit-

---

[1] Zie JANUS, Revue internationale de l'histoire des sciences, de la médecine, de la pharmacie et de la technique, LVI (1969) blz. 210, alwaar ook literatuurverwijzingen.

nodigt tot het rekenen met 'pen en inkt' – bedienden de Grieken zich voor het rekenen van rekenborden of abaci.
Op een rekenbord of een rekentafel waren banen getrokken. Afhankelijk van de baan, waarin men een rekensteentje (calculus) plaatste, kreeg het zijn waarde. Zo werden de getallen ongemerkt positioneel 'geschreven.'
De handabacus, die bij de Romeinen gebruikt werd, bezat gleuven (alveoli) waarin knoopjes (clavuli) heen en weer geschoven konden worden. Het zal duidelijk zijn dat de rekentechniek bij een abacus of telraam, als men dus gebonden is aan het aantal knoopjes dat per gleuf of stang gegeven is, meer vaardigheid vereist dan de techniek van het rekenen op een rekenbord, waarop men naar believen steentjes bij kan plaatsen. Vooral als het aantal knoopjes per positie, zoals bij de Romeinse abacus, tot een minimum beperkt is, wordt die grotere handigheid verlangd.
De Romeinse abacus dan had per decade twee gleuven. Op de onderste, de lange gleuf, waren vier knoopjes met positie-waarde één aangebracht. Op de bovenste, de korte gleuf, was één knoopje met positie-waarde vijf aangebracht. Deze zelfde indeling ziet men omstreeks 2000 jaren later, in de twintiger jaren van onze eeuw, terugkomen op de Japanse soroban, een abacus, die zich ontwikkelde uit de Chinese suan-pan, welke aan het begin van de 18e eeuw in Japan in gebruik kwam.
De Chinese suan-pan is een telraam, dat ook per decade in tweeën verdeeld is. 'Beneden' bevinden zich vijf knoopjes met positiewaarde één, 'boven' bevinden zich twee knoopjes met positie-waarde vijf. De Chinese suan-pan is dus overbezet!
Op de drie genoemde rekenapparaten worden de knoopjes in de neutrale toestand gebracht door ze naar de buitenkant te vegen. De één-knoopjes naar 'beneden', de vijf-knoopjes naar 'boven.' Een getal wordt op het telraam geplaatst door de benodigde knoopjes tegen de middenscheiding te plaatsen. Bijvoorbeeld:



4 Tot op de huidige dag zijn in verschillende landen abaci belangrijke hulpmiddelen bij het rekenen in het dagelijkse leven. De Japanse soroban en de Chinese suan-pan werden reeds genoemd; nog moet melding gemaakt wor-

den van de in Rusland in gebruik zijnde stschoty. Die stschoty is een telraam met 10 kralen per stang. (Dat twee stangen slechts 4 kralen bezitten in verband met de onderverdeling van de roebel, is een soortgelijk detail, dat we ook stilzwijgend bij de Romeinse abacus buiten beschouwing lieten.)
Het telraam dat bij ons wel gebruikt wordt bij het rekenonderwijs in de basisschool is van die Russische stschoty afgeleid. Op de scholen van Metz werd het telraam, boullier, voor het eerst in West-Europa geïntroduceerd door Poncelet.

Jean Victor Poncelet (1788–1867) diende als genie-officier in het Napoleontische leger. Hij werd op de terugtocht uit Rusland (1812) krijgsgevangen genomen. Niet alleen gebruikte hij die krijgsgevangenschap om zijn baanbrekende werk *Traité des Propriétés Projectives des Figures* voor te bereiden, maar hij maakte tijdens die gevangenschap ook kennis met de tschoty.

Dat de Westeuropeaan niet hautain glimlachende de telramen – zoals soroban, suan-pan en stschoty – terzijde mag schuiven, moge blijken uit het resultaat van een rekenwedstrijd welke plaatsvond op 12 november 1946. Op die dag werd onder auspiciën van het Amerikaanse legerdagblad 'Stars and Stripes' in het Ernie Pyle Theater in Tokio een rekenwedstrijd georganiseerd tussen de 22-jarige Kiyoshi Matsuzaki en de eveneens 22-jarige soldaat Thomas Ian Wood. De beide rekenaars waren werkzaam in de administratieve sector en zij hadden een ruime ervaring op het rekenapparaat dat zij gebruikten. Matsuzaki een soroban, waarde $ 3; Wood een elektrische machine, waarde $ 700.
De 3000 Amerikaanse soldaten, die Wood waren komen aanmoedigen, zagen hun landgenoot duidelijk verliezen van de Japanner, die met een razende snelheid de knoopjes op zijn abacus heen en weer schoof en zodoende nog de bijnaam *The Hands* verwierf.
Alleen bij het vermenigvuldigen kon Wood winst boeken; de soroban-vermenigvuldiging vraagt namelijk relatief veel handelingen. Bij de andere opgaven toonde zich Matsuzaki de meerdere. Het meest sprekende was wel het resultaat van de optel-opgaven: 50 getallen variërende van 3 tot 6 cijfers moesten worden opgeteld. In de eerste ronde had Matsuzaki daar 1 min 14,8 sec voor nodig, Wood 2 min 0,2 sec; in de tweede ronde waren de tijden resp. 1 min 16,0 sec en 1 min 53,0 sec.

5 Nu men in België onder leiding van het echtpaar Papy pogingen waagt om een z.g. minicomputer in te voeren ten behoeve van het rekenonderwijs in de basisschool, en ook in Euclides (45e jaargang, 1969/1970, blz. 153) aandacht aan dat didactische hulpmiddel besteed werd, leek het mij niet ongewenst de lezers van Euclides middels de hiervoorgaande beknopte uiteenzetting te attenderen op de historische ontwikkeling van getallenschrift en rekenhulpmiddelen. Diegenen, die uitvoeriger geïnformeerd wensen te worden, kan ik verwijzen naar het voortreffelijke werk *Zahlwort und Ziffer* van Karl Menninger (deel I & II, 2e druk, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1957/1958), waaruit ik o.a. geput heb bij het opstellen van dit stuk.

Die minicomputer is een rekenbord, waarop de getallen in ons 10-tallige positiestelsel aangegeven worden met 'cijfers', die 2-tallig gerepresenteerd worden. Een m-tallig positiestelsel, waarin de 'cijfers' n-tallig gerepresenteerd worden ($m > n > 1$; m en n behorende tot de natuurlijke getallen) hebben we eerder ontmoet, namelijk: bij de Babyloniër is $m = 60$ en $n = 10$; bij het werken op de Romeinse abacus, de Japanse soroban en de Chinese suan-pan is $m = 10$ en $n = 5$; bij het opschrijven van grote getallen is bij ons $m = 1000$ en $n = 10$. Voor zover ik begrepen heb moet het Papy-bord, de minicomputer, slechts gezien worden als een didactisch hulpmiddel voor de beginfase van het rekenonderwijs. Het schijnt niet de bedoeling te zijn die minicomputer een plaats te geven in het dagelijkse leven. (Als rekenbord is deze minicomputer daarvoor trouwens te onpraktisch; en zo men een telraam-versie van het ding zou ontwerpen [2], dan zou men daarop een factor twee langzamer moeten werken dan op de soroban.) Ook schijnt het niet de bedoeling te zijn de kinderen naast het decimale stelsel kennis te laten maken met het binaire stelsel. (Van die kennismaking zou overigens weinig beklijven, indien de leerlingen niet regelmatig in contact blijven met dat binaire stelsel.)

6 Men kan heden ten dage geen tijdschrift op onderwijskundig gebied opslaan of men treft daarin het woord *experiment* aan. Dat woord is dan meestal als etiket geplakt op een ontwerp, of een probeersel, van de één of andere vakspecialist, die op het gebied van de onderwijs-research slechts een goedwillende amateur is.
Onder een experiment versta ik een onderdeel van een weloverwogen onderzoekprogramma; een programma, dat erop gericht is de invloed van verschillende variabelen op een bepaald proces te onderzoeken.
Met de huidige z.g. experimenten in het onderwijs doet men vaak niet veel meer dan nagaan of andere leerstof, of een ander leerplan, of een andere organisatorische opzet, uitvoerbaar is. Waarbij dan criteria voor dat 'uitvoerbaar zijn' ontbreken. Waarbij vragen ten aanzien van efficiëntie en effectiviteit niet gesteld worden; laat staan dat dergelijke vragen beantwoord worden.
Het zij toegegeven, dat in het algemeen het lokaliseren van de variabelen bij onze onderwijskundige onderzoekingen, voordat we onze experimenten kunnen beginnen, een gecompliceerde aangelegenheid is. Het bovenstaande verhaal (onder 5) levert echter twee hanteerbare variabelen op voor experimenten met het rekenonderwijs in de basisschool, namelijk de 'm' en de 'n'.
Nu is het weinig aantrekkelijk om m een andere waarde dan 10 te geven! Waarom zullen we voor m geen andere waarden proberen?
Wel, omdat we onze leerlingen een scholing willen geven, die het hen mogelijk moet maken een plaats te vinden in een toekomstige samenleving, waar zij zich optimaal kunnen ontplooien. Daarbij is dan verder te verwachten dat die

---

[2] Zie onder 13 van dit artikel.

samenleving beheerst zal worden door het decimale regime. Vanwege dat laatste zal het voor de doorsnee-leerling van het basisonderwijs van weinig praktische waarde zijn om naast het decimale stelsel ook kennis te maken met andere stelsels. Het ook leren van andere stelsels zal voor hem betekenen, dat hij tijd en aandacht moet besteden aan het opnemen van overbodige ballast.
Tegenover dat pragmatische standpunt kan men een idealistische visie plaatsen. Namelijk, dat het ook leren van andere systemen, dan het systeem dat men later zal moeten hanteren, meer inzicht zal aanbrengen en daardoor weer meer ontplooiingskansen zal geven voor later. Een voor het aanvangsrekenonderwijs nogal overtrokken visie, lijkt mij.
Onze pragmaticus nu zal $m = 10$, constant, houden. Onze idealist zal bij zijn experimenten ook m moeten variëren.

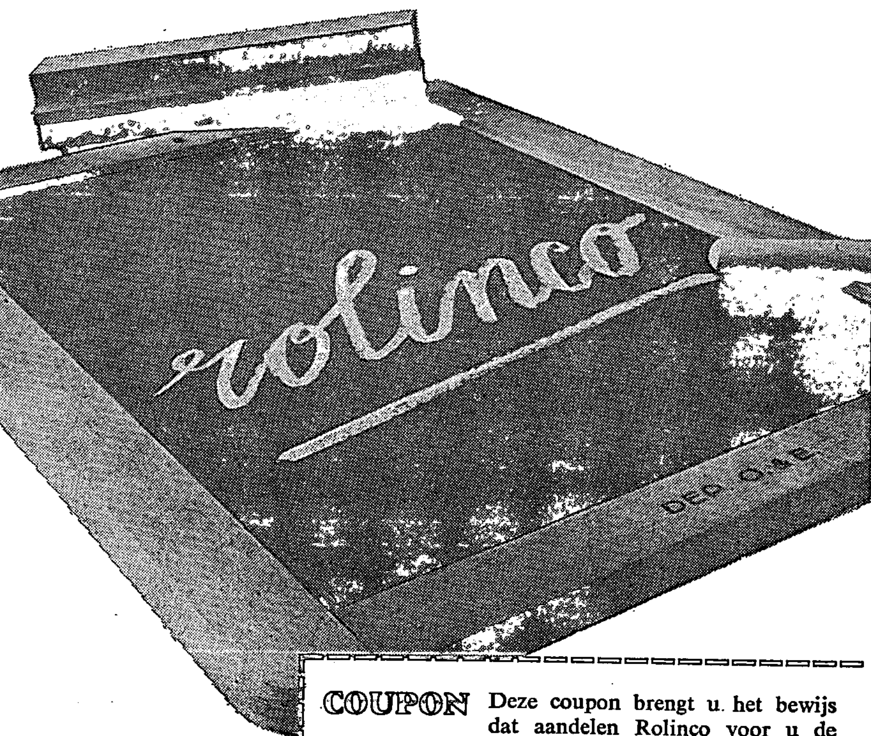
Wat kunnen we uit dat voorbeeld, waarin de pragmaticus en de idealist tegenover elkaar staan, leren:
Voor en aleer men werkelijk kan gaan experimenteren in het onderwijs zal men niet alleen klaarheid moeten hebben omtrent de doelstellingen van dat onderwijs, maar ook omtrent het standpunt, dat men als uitgangspunt wenst in te nemen, om die doelstellingen te verwezenlijken.
Tevens blijkt dat we daarbij de kans lopen verzeild te raken in vage algemeenheden, die niet te hanteren zijn, want wat wil bijvoorbeeld zeggen: 'het doel van ons onderwijs is om de leerlingen optimale ontplooiingsmogelijkheden te bieden'?
Dat de verschillende standpunten, die men kan innemen, om tot een doel te geraken, als onverenigbaar tegenover elkaar kunnen blijven staan is een lering die men eveneens kan trekken.
Zullen we als gevolg van die onverzoenbaarheid der standpunten, in de toekomst, in het verzuilde Nederlandse onderwijs naast streng-klassikale scholen, dalton-scholen en montessori-scholen ook nog kunnen aantreffen pragmatische scholen, idealistische scholen, . . .?

7 Met n is het anders gesteld! De keuze van n wordt niet bepaald door de huidige wereld waarin we leven. Als we dan toch willen experimenteren met het rekenonderwijs, moeten we ons niet beperken tot $n = 2$.
Een volgende keuze voor n, in ons onderzoekprogramma, wordt door de historie opgedrongen, en wel $n = 5$.
Laten we het rekenbord, dat we dan krijgen, dat overeenkomstig de soroban ingedeeld is, een soroban-bord noemen. Bij dat soroban-bord zal het onmiddellijk opvallen, dat de 'cijfers' veel overzichtelijker afleesbaar zijn, dan de mini-computer-cijfers.

Men vergelijke slechts:

Beleggingskunde

wijzer wordt).



COUPON Deze coupon brengt u. het bewijs dat aandelen Rolinco voor u de beste belegging zijn. En dat het Rolinco Plusplan de makkelijkste en voordeligste manier is om ze te sparen.

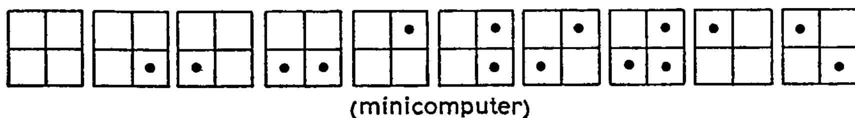
Naam ______________________

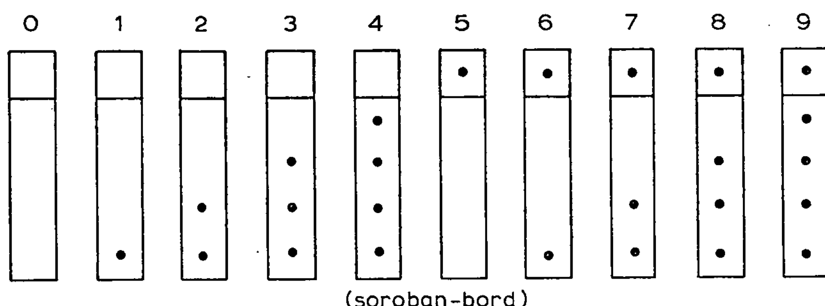
Adres ______________________

Plaats ____________ Tel. ____________

In envelop zónder postzegel opsturen aan Roplusco n.v. Antwoordno.1205 Amsterdam. U kunt ook bellen: 020 - 23 87 15.

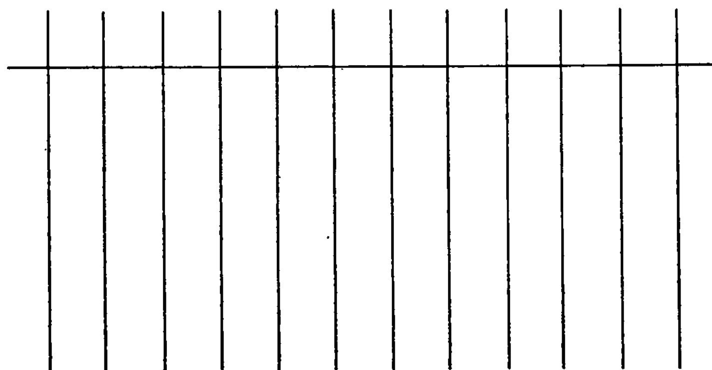
EU


(minicomputer)



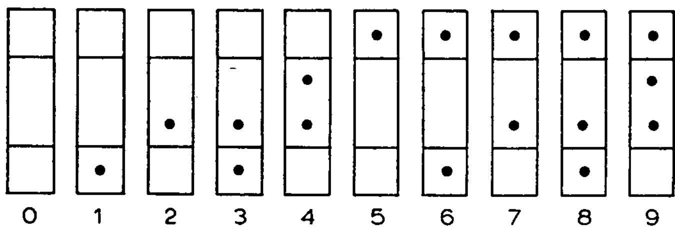
(soroban-bord)

Het soroban-bord is in vakken verdeeld, waarbij ieder vak een decade representeert en uit twee velden bestaat. Op het bord wordt met fiches gerekend, waarbij de optredende ⁘-bundeling onze kleuters reeds vroeg bekend is van de dobbelsteen.
Alle rekenkundige bewerkingen uit ons 10-tallige positiestelsel, die men met de minicomputer kan demonstreren, kan men eveneens demonstreren op ons soroban-bord en omgekeerd. Daarbij zal het soroban-bord minder handelingen vragen, omdat het aantal velden per decade bij dat bord twee is en bij de minicomputer het dubbele daarvan. Aan de andere kant is de minicomputer wat zuiniger ten aanzien van het aantal benodigde fiches. Toch durf ik te stellen dat het soroban-bord een factor, groot $1\frac{1}{2}$ à 2, sneller zal werken dan de minicomputer.
Zo'n soroban-bord is overigens zeer eenvoudig samen te stellen door een aantal vertikale banen te trekken, met een horizontale dwarsstreep.



Bij de minicomputer zal men de vakken duidelijk moeten scheiden, omdat anders vakken (decaden) en velden door elkaar gaan lopen.

8 Als ludieke variatie kan men ook nog proberen de 2- en de 5-bundeling te combineren. De 'cijfers' van het spelletje dat men dan krijgt zien er als volgt uit:



Het zal de lezer duidelijk zijn wat de bedoeling is. Een fiche op het onderste veld krijgt positiewaarde 1, op het middelste veld 2 en op het bovenste veld 5. Tevens blijkt waarom de indeling van de gewichten-doos 1, 2, 2, 5, 10, 20, 20, 50, etc. is.

9 Als men met rekenborden, in welke vorm dan ook, gaat experimenteren als didactische hulpmiddelen bij het rekenonderwijs, dan mag men niet vergeten ook de telramen in zijn onderzoekingen op te nemen. Het programma, dat men dan moet afwerken, zal zeker bestaan uit: a) Rekenborden; b) Telramen; c) Rekenborden en telramen, waarbij men het rekenbord laat volgen door het overeenkomstige telraam.
Voor de telramen zou men het nog eens kunnen proberen met het telraam met 10 balletjes per stang. In ons onderwijs is dat telraam nooit erg populair geweest. Een bezwaar, dat zeker aan dat telraam kleeft, is dat de getallen van boven naar beneden worden ingesteld, terwijl we de getallen overeenkomstig van links naar rechts schrijven.
Een vlak op tafel liggend telraam, waarbij de stangen 'vertikaal' geplaatst zijn en de getallen van links naar rechts ingesteld worden, sluit nauwer aan bij de schrijfwijze van de getallen. Wellicht heeft de zwaartekracht de ontwikkeling van het telraam tot die vlakliggende vorm tegengewerkt. Zo'n telraam is niet te gebruiken op het schuine tafelblad van onze ouderwetse schoolbanken. Ook zal het demonstratiemodel, bedoeld voor klassikaal onderwijs, speciale voorzieningen eisen om te voorkomen dat de balletjes terugvallen in de neutrale stand.
Een tweede bezwaar, dat aan het telraam met 10 balletjes per stang kleeft, is dat het voor gebruik in het 10-tallige positie-stelsel overbezet is. Want:
Voor een materiële representatie van een n-tallig positie-stelsel hebben we $n-1$ objecten per positie nodig; mits geen onderverdeling aangebracht is, zoals bij

de soroban. (De '0' wordt geleverd door de neutrale stand van de rekenobjecten.)
Zo zou ons traditionele telraam eerder bij een 11-tallig positie-stelsel passen, dan bij een 10-tallig stelsel. Een overbezet telraam, zoals bijvoorbeeld ook de suan-pan is, kan aanleiding geven tot broddelen bij het rekenen. Een minimaal bezet telraam, zoals de soroban, dwingt de gebruiker tot discipline bij het rekenen, omdat hij minder variatie-mogelijkheden heeft dan bij een overbezet telraam.
Een telraam met 9 balletjes per stang lijkt mij dan ook zeker te passen in een onderzoekprogramma betreffende het rekenonderwijs.

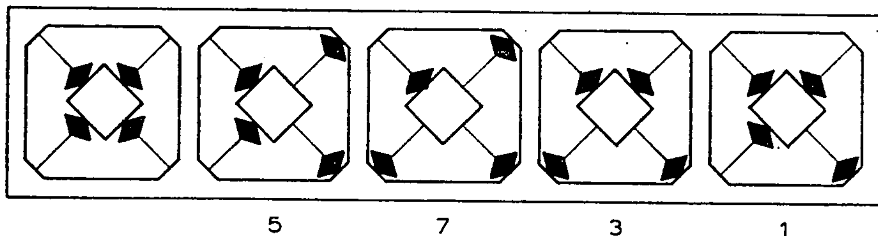
10 Wel moet erop gewezen worden, dat met een rekenbord alle bewerkingen gedemonstreerd kunnen worden, die men bij het rekenen met 'pen en inkt' uitvoert; mits dat rekenbord op geschikte wijze is ingedeeld. Ook kan men met zo'n rekenbord het rekenen met een telraam simuleren.
Met een telraam kan men echter niet alle bewerkingen, zoals men die bij het 'pen en inkt'-rekenen uitvoert, simuleren.
Twee voorbeelden: a) Indien wij een lange rij getallen, met meer dan één of twee cijfers, moeten optellen, dan doen wij dat kolomsgewijs. Met een telraam zal men dat getal voor getal doen. b) Bij het aftrekken, op papier, beginnen wij aan de 'achterkant' en werken naar voren en indien een aftrekking niet opgaat in de betreffende decade, dan lenen we van de volgende decade.
Op een telraam werkt het bij het aftrekken handiger om aan de 'voorkant' te beginnen. Het lenen zal niet lukken, zeker als het telraam niet overbezet is. Voor het lenen komt in de plaats het z.g. complementaire rekenen.
$36-28$, zo we het antwoord niet onmiddellijk zien, wordt op een telraam als volgt uitgewerkt: Nadat 36 ingesteld is, wordt eerst 2×10 van 3×10 afgetrokken; omdat daarna 8 zich niet van 6 laat aftrekken, wordt 1×10 afgetrokken en 2 opgeteld.
Het zal duidelijk zijn dat iemand, die opgevoed is in een rekentechniek met een telraam, zoals de Japanner met zijn soroban, indien hij overgaat op het rekenen met 'pen en inkt', of op het 'hoofdrekenen', daarbij dan een techniek zal hanteren, die afgeleid is van zijn telraam-rekenen. De Japanner visualiseert bij het 'hoofdrekenen' de verschillende soroban-standen, die hij was tegengekomen, indien hij zijn toevlucht had genomen tot zijn abacus.
Het is daarom te verwachten, indien wij in het basisonderwijs een experiment (zie onder 6) met de soroban zouden nemen, dat de kinderen, die deel zouden nemen aan dat experiment, later een van de onze afwijkende rekentechnieken zullen hanteren, ook als zij de soroban niet meer gebruiken.

11 De soroban vereist een zekere vingervaardigheid. Als didactisch hulpmiddel zou die soroban daarom niet alleen de rekentechnische ontwikkeling van het kind kunnen steunen, maar ook kunnen bijdragen tot de motorische ontwikkeling.

Dat laatste aspect is reeds ontdekt door revalidatie-artsen. Zo wordt de soroban bij de arbeids-therapie gebruikt in het Wilhelmina Gasthuis te Amsterdam.

12 De soroban, de suan-pan en ons 10-balletjes-per-stang-telraam kunnen we nog gebruiken om het rekenen in andere positie-stelsels, dan het 10-tallige, materieel te illustreren.
Van de soroban, met vier balletjes beneden en één balletje boven per stang, kunnen we het bovenste deel gebruiken voor het 2-tallige stelsel, het onderste deel voor het 5-tallige stelsel.
Van de suan-pan, met vijf balletjes beneden en twee balletjes boven per stang, kunnen we het bovenste deel gebruiken voor het 3-tallige stelsel, het onderste deel voor het 6-tallige stelsel. De suan-pan, in zijn geheel, kunnen we gebruiken voor het 18-tallige stelsel. ($m = 18$; $n = 6$.)
Dat ons traditionele telraam gebruikt kan worden voor het 11-tallige stelsel is reeds vermeld.

13 Hoe zouden we nu een telraam kunnen construeren dat qua indeling overeenstemt met het Papy-bord, de minicomputer?
Wel, omdat iedere positie in vieren gedeeld moet worden, kunnen we voor dat telraam per positie, per tiental, een kruis gebruiken. Omdat de 'cijfers' 2-tallig gerepresenteerd moeten worden, kunnen we volstaan met het aanbrengen van één knoopje op iedere poot van het kruis. Dan nog een afspraak omtrent de neutrale stand van de knoopjes, zèg in het midden van het kruis, en we zijn klaar.



5 7 3 1

Overigens zou ik het zo geconstrueerde apparaat liever gebruiken voor het rekenen in een 16-tallig stelsel; waarbij ik dan wellicht de intentie zou krijgen de staafjes naast elkaar te plaatsen, voor zuiver binair gebruik.

De implicatie

P. G. J. Vredenduin
Oosterbeek

R. Holvoet stelde in een voordracht in Knokke (mei 1970) het volgende probleem. Gegeven is de relatie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$

$$R = \{(0, 4)\},$$

waarvan het enige element dus het paar (0, 4) is. Anders geformuleerd

$$R = \{(x, y) | x = 0 \wedge y = 4\}.$$

Is deze relatie transitief? D.w.z. volgt uit

$$a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \wedge (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \tag{1}$$

dat ook

$$(a, c) \in R? \tag{2}$$

Voor het mathematisch geschoolde verstand is dit een aardig probleem. Aan de premisse (1) kan niet voldaan worden. De implicatie (1) $\Rightarrow$ (2) is dus juist en de relatie R is daarom transitief. De reactie van het natuurlijke verstand op het probleem is echter averechts hiervan verschillend. Volgens het natuurlijke verstand is het probleem absurd, omdat (1) een strijdigheid inhoudt. De reactie van de wiskundige op dit probleem verschilt essentieel van de reactie van de niet logisch-mathematisch geschoolde leek. Nu behoren onze leerlingen, althans zolang we hen niet kunstmatig omgevormd hebben, tot de niet logisch-mathematisch geschoolde leken. En dus doet zich hier een typisch didactisch probleem voor. Als leraar zijn we verplicht ons er rekenschap van te geven, waarom de reactie van de leek verschillend is van die van de wiskundige. Eerst daarna kunnen we ons standpunt bepalen ten aanzien van de wijze, waarop de leek omgevormd moet worden tot logisch-mathematisch denkend individu. Onze eerste taak is dus te analyseren, wat de betekenis van de implicatie is voor het natuurlijke denken. Aan de hand van een paar voorbeelden wil ik proberen dit na te gaan.

Voorbeeld 1. A. Geeft mijn paspoort mij recht op een reis naar het buitenland?
B. Dat hangt ervan af. Heb je een Nederlands paspoort? Wanneer is het afgegeven? Naar welke landen wil je reizen? Wanneer?
A. Ik heb een Nederlands paspoort. Het is afgegeven op 12 januari 1963. Ik wil reizen naar West-Duitsland en Zwitserland. De reis zal plaats vinden in oktober van dit jaar (1970). (*Inf*)
B. Als een Nederlands paspoort niet meer dan tien jaar te voren is afgegeven, geeft het recht op reizen naar West-Duitsland, Frankrijk, Italië, Oostenrijk en Zwitserland. (*K*)
Je paspoort geeft je dus het recht op een reis naar West-Duitsland en Zwitserland in oktober van dit jaar. (*p*)
Op grond van de kennis (*K*), die B bezit, en de informatie (*Inf*), die A hem verschaft, besluit hij tot de geldigheid van de uitspraak *p*. Bij het trekken van deze conclusie gaat B zuiver formeel tewerk. Louter op grond van de structuur van de uitspraken uit *K* en *Inf* besluit hij tot *p*.
De gebruikelijke notatie hiervoor is

$$K,\ Inf \vdash p.$$

Voorbeeld 2. In een calorimeter gevuld met water met temperatuur 12° wordt een stuk koper gedompeld van 100 gram en temperatuur 120°. De eindtemperatuur is 15°. De waterwaarde van de calorimeter inclusief het water is 315 gram. Gevraagd wordt de soortelijke warmte van koper.
Ditmaal bestaat *K* uit het geheel van de fysische wetten, waarvan de geldigheid bij de oplossing van het vraagstuk verondersteld wordt, en verder uit de rekenwetten. *Inf* bestaat uit de gegevens betreffende begin- en eindtemperatuur, gewicht van het koper en waterwaarde van de calorimeter. De berekening levert

de soortelijke warmte van koper is 0,09. (*p*)

We noteren weer

$$K,\ Inf \vdash p.$$

Voorbeeld 3. In de wiskunde is de situatie net zo. Als voorbeeld kiezen we een planimetrische stelling:

de hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt.

De informatie *Inf* wordt hier veelal 'gegeven' genoemd. *Inf* bestaat uit:

A, *B* en *C* zijn punten, er is geen rechte lijn die door *A*, *B* en *C* gaat, de rechte lijn *l* gaat door *A* en staat loodrecht op *BC*, *m* gaat door *B* en staat loodrecht op *AC*, *n* gaat door *C* en staat loodrecht op *AB*.

De uitspraak *p* wordt veelal 'te bewijzen' genoemd. Deze uitspraak luidt:

er is een punt, waardoor de rechte lijnen *l*, *m* en *n* gaan.

Blijft nog over de vraag, wat in dit geval *K* is. *K* is de voorkennis, die ons in staat stelt uit *Inf* tot *p* te besluiten. Deze voorkennis bestaat uiteindelijk, zoals bekend, uit de axioma's van de planimetrie.

Leerplan in

(of hoe u door aandelen sparei

Sparen?
De gulden wordt elke dag minder waard. Slechts weinig rentepercentages kunnen daar tegen op. Wat dan. Risico's nemen met investeringen? Dat kan geld kosten.

Beleggen in aandelen?
Aantrekkelijk. Maar hebt u tijd om elke dag beursberichten te bestuderen, uw aandelen te volgen?

Rolinco Plus-plan voor u ideaal.
Uitgerekend het mooiste Plan. Per maand betaalt u enkele tientallen guldens. Over 10, 15, 20 jaar hebt u een interessant aandelen-pakket Rolinco. En een flinke winst.

Wat is Rolinco?
Rolinco is ook internationaal een van de grootste beleggings-maatschappijen, met brééd gespreide belangen in alle grote groeifondsen ter wereld. Met gekwalificeerde beleggings-experts. Zwart op wit kunnen wij u aantonen dat Rolinco t.o.v. andere beleggingsfondsen de meest konstante en optimale groei vertoont!

Rolinco winsten zijn úw winsten.
Rolinco heeft als het ware de struktuur van een coöperatie. Als u aandeelhouder bent hebt u alle inspraak. En het volle profijt van de resultaten! Wij willen u graag uitleggen dat géén z.g. „managementcompany" met de grote winsten gaat strijken.
Rolinco biedt u het laagste kostenpercentage.

Als ambtenaar verdient u een premie.
Van de Overheid krijgt u een premie als u in een aandelenspaarplan spaart. Dat maakt het nog voordeliger. En interessant: het Plan is gebaseerd op een levensverzekering, dus gedurende de looptijd extra zekerheid voor u en uw gezin. Plus dat hierdoor het Rolinco Plus-plan de voordéligste manier is om aandelen Rolinco te verwerven. Dit kunnen wij u aantonen.

Rolinco
Plus-plan

Dat is, wat onze leerlingen zouden moeten leren: in plaats van het rode lampje te laten branden gewoon doorgaan. Dus gewoon deduceren, alsof men zich van geen contradictie bewust zijn.
Laten we dat eens doen. Gewone deductieregels zijn:

$p \vdash p \vee q$
$\neg p, p \vee q \vdash q$
als $a \vdash b$ en $b, c \vdash d$, dan $a, c \vdash d$.

Substitueer in de laatste regel

p voor a, $p \vee q$ voor b, $\neg p$ voor c en q voor d.

We vinden dan

$$p, \neg p \vdash q.$$

En hiermee is gevonden, dat uit contradictore premissen elke uitspraak deduceerbaar is.
Nu zijn de standpunten van het natuurlijke en van het theoretische verstand elkaar dicht genaderd. Zodra de contradictie gesignaleerd is, weigert het natuurlijke verstand verder te deduceren. Dat is nog zo gek niet, want volgens het theoretische verstand is nu elke uitspraak deduceerbaar, waardoor het een overbodige bezigheid wordt te trachten in concreto bepaalde uitspraken af te leiden. Toch laat het voorbeeld van Holvoet zien, dat het zinvol kan zijn te constateren, dat uit contradictore informatie een bepaald resultaat afleidbaar is.
We beschouwen opnieuw de notatie

$$K, \mathit{Inf} \vdash p.$$

In de wiskunde bestaat K hier uit de axioma's, die aan het systeem, waarin men werkt, ten grondslag liggen. Meestal schrijven we *Inf* niet in de vorm van een verzameling uitspraken, maar als conjunctie, waardoor *Inf* één uitspraak wordt. In plaats van $K, \mathit{Inf} \vdash p$ schrijven we meestal

$$\mathit{Inf} \Rightarrow p. \qquad (3)$$

K wordt niet expliciet vermeld; het is immers geen gebruik steeds te vermelden welke axioma's aan de theorie ten grondslag liggen, als men binnen deze theorie aan het deduceren is.
Van belang is, dat (3) een relatie is tussen de uitspraken *Inf* en p. Met (3) wordt namelijk bedoeld, dat het mogelijk is (op grond van de axioma's) uitgaande van *Inf* de uitspraak p te deduceren. En dus is (3) eigenlijk een uitspraak over de theorie en niet in de theorie.
Nu zijn de wiskundigen verder gegaan. Ze hebben een tweewaardige logica ontworpen, waarbij ze ervan uitgegaan zijn, dat elke uitspraak hetzij waar hetzij onwaar is. Precieser gezegd: deze tweewaardige logica mag in een theorie

toegepast worden, als we ervan uitgaan, dat in deze theorie elke uitspraak hetzij waar hetzij onwaar is. Ze hebben bewezen, dat voor deze tweewaardige logica (en voor een grote groep andere logica's) geldt:

als $K, p \vdash q$, dan $K \vdash \neg p \vee q$,

als $K \vdash \neg p \vee q$, dan $K, p \vdash q$.

Anders gezegd

$p \Rightarrow q$ is gelijkwaardig met de afleidbaarheid (uit de axioma's) van $\neg p \vee q$.

Of

$p \Rightarrow q$ is gelijkwaardig met de bewijsbaarheid van $\neg p \vee q$.

Deze stelling staat bekend onder de naam *deductietheorema.*
Dit resultaat heeft de logici ertoe gebracht voor $\neg p \vee q$ een andere schrijfwijze te bedenken. Ze definiëren

$$p \rightarrow q \underset{\text{df}}{=} \neg p \vee q$$

en nemen de gewoonte aan $p \rightarrow q$ uit te spreken: p impliceert q.
Voor degeen, die geïnteresseerd is in grondslagenonderzoek, is dit resultaat belangrijk. Uit didactisch oogpunt zou ik haast willen zeggen, dat ik het jammer vind, dat dit theorema ooit is uitgevonden. De in de aanvang geschetste betekenis van $p \Rightarrow q$ is voor iedereen duidelijk en is in overeenstemming met de betekenis, die de leerling van nature aan de implicatie hecht. Daarentegen leidt de interpretatie van de implicatie als $p \rightarrow q$ ertoe, dat men een waardetabel van de implicatie gaat opstellen en dan b.v. constateert, dat $p \rightarrow q$ waar is, als p en q beide onwaar zijn[1]). Dit is allemaal juist, maar het werkt verre van verhelderend en we hebben het in ons onderwijs niet nodig. We kunnen zelfs in moeilijkheden komen, als we vasthouden aan de waardetabel voor de implicatie, zoals Van den Brom uiteengezet heeft in zijn artikel: Gelijkwaardig $\Leftrightarrow$ ekwivalent? (Euclides 44, p. 130–135).
De uitspraak, die tot moeilijkheden leidde, was

$$\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b \neq 0. \qquad (4)$$

Voor $b = 0$ staat rechts van het ekwivalentieteken een onware uitspraak en links ervan geen onware uitspraak, maar een zinloze tekencombinatie. Daarom is er van ekwivalentie geen sprake.
De ekwivalentie (4) zou dus alleen dan een juiste uitspraak zijn, als voor elke waarde van a en van b beide leden overgaan in ware of beide leden in onware

---

[1]) Voor een nadere uiteenzetting betreffende het verschil in betekenis tussen $p \rightarrow q$ en $p \Rightarrow q$ zie de op blz. 151 afgedrukte Korrel.

uitspraken. Uitgegaan is daarbij van de interpretatie van de ekwivalentie, zoals deze in de tweewaardige logica gebruikelijk is. Toepasbaarheid van de tweewaardige logica vooronderstelt, dat elke uitspraak hetzij waar hetzij onwaar is. In ons geval zou deze toepasbaarheid vooronderstellen, dat voor elke waarde van a en van b beide leden van (4) overgaan in uitspraken, die hetzij waar hetzij onwaar zijn. En aan deze eis is nu juist niet voldaan. Daarmee vervalt de toepasbaarheid van de tweewaardige logica en daarmee de interpretatie van de ekwivalentie conform de waarheidstabellen. En het was juist deze interpretatie, die ons in moeilijkheden bracht.

Om (4) nader te kunnen kritiseren, zullen we dus uit moeten gaan van een andere interpretatie van de ekwivalentie. Omdat ekwivalentie niets anders inhoudt dan dubbele implicatie, zullen we moeten uitgaan van een andere interpretatie van de implicatie. Het ligt voor de hand het te proberen met de interpretatie van de implicatie, die we aanvankelijk beschouwd hebben, namelijk

$p \Rightarrow q$ betekent $K, p \vdash q$.

Doen we dit, dan wordt de interpretatie van (4)

$$K, \frac{a}{b} = 0 \vdash a = 0 \wedge b \neq 0,$$

$$K, a = 0 \wedge b \neq 0 \vdash \frac{a}{b} = 0.$$

D.w.z. uitgaande van de axioma's van de theorie van het reële getal geldt:

als a en b zodanige reële getallen zijn dat $a/b = 0$, dan is zowel $a = 0$ als $b \neq 0$,

als a en b zodanige reële getallen zijn dat $a = 0$ en $b \neq 0$, dan is $a/b = 0$.

Of anders gezegd:

uit $a/b = 0$ is deduceerbaar $a = 0 \wedge b \neq 0$, en omgekeerd.

En dit is juist.

Volgens onze afspraak over het gebruik van het teken $\Rightarrow$ mogen we nu dus schrijven:

$$\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b \neq 0$$

en

$$a = 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 0.$$

Hetgeen men pleegt samen te vatten in de schrijfwijze

$$\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b \neq 0^{1}.$$

---

[1] Met het bovenstaande bedoel ik niet de opmerkingen van Van den Brom te ontzenuwen. Integendeel, ik ben hem dankbaar voor zijn artikel. Doordat hij gewezen heeft op de ontoelaatbaar van de traditionele interpretatie van (4), ben ik ertoe gekomen deze kwestie nader te bezien.

Misschien vraagt men zich nu met schrik af: hoe moet ik deduceren, als ik niet meer de vanouds vertrouwde tweewaardige logica kan gebruiken?
Deze kwestie is niet zo urgent, als ze lijkt. Deduceren leren is nu eenmaal iets principieel anders dan zwemmen leren. Bij het zwemmen leren, leer je eerst, dat je beginnen moet met armen voor enz. en als je deze regels kent, dan ga je ze toepassen. Deduceren is iets, dat je doet en als je het eenmaal gedaan hebt, dan ga je je handelwijze analyseren en de regels opstellen volgens welke je gededuceerd hebt. Zo is elke logica tot stand gekomen. De tweewaardige logica is tot stand gekomen door te analyseren, hoe men dacht. De intuïtionisten hebben gronden aangevoerd om anders te gaan denken. Ze hebben dit gedaan en nadat de beginselen van de intuïtionistische wiskunde eenmaal ontwikkeld waren, heeft Heyting de regels van de intuïtionistische logica gecodificeerd. Met Griss' negatieloze logica is het net zo gegaan. Hier is de situatie niet anders. Ik geloof niet, dat iemand er moeite mee heeft uit $a/b = 0$ te deduceren $a = 0 \wedge b \neq 0$. De regels volgens welke men te werk gaat te codificeren is moeilijker. Maar ook zonder deze regels op te stellen kunnen we het deductieproces uitvoeren.
Op verschillende manieren is gepoogd regels op te stellen voor det deduceren in formele systemen, waarin sommige uitdrukkingen niet voor alle waarden van de erin voorkomende variabelen betekenis hebben. Sommigen kiezen de volgende methode. Een uitdrukking van de vorm $A = B$, $A > B$ of $A < B$, die geen betekenis heeft, is een onware uitspraak. De negatie van een dergelijke uitdrukking is een ware uitspraak. Zo is $\frac{3}{0} = 4$ een onware uitspraak en $\frac{3}{0} \neq 4$ (of $\neg \frac{3}{0} = 4$) een ware uitspraak. Na deze afspraak is elke uitdrukking een uitspraak, die hetzij waar hetzij onwaar is, en kunnen we zonder enig bezwaar verder onze tweewaardige logica gebruiken.
De uitspraak

$$\frac{a}{b} = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b \neq 0 \qquad (4)$$

levert nu geen moeilijkheden meer. Voor $b = 0$ zijn beide leden onwaar en daarmee is de hindernis genomen, die ons ervan weerhield (4) als juist te accepteren.
Bovengenoemde methode wordt o.a. gevolgd door G. Pickert. Pickert is echter een stap verder gegaan en heeft een redelijke rechtvaardiging ervoor gevonden de betekenisloze uitdrukkingen voor onware uitspraken te houden. Hij definieert b.v. niet a/b, maar hij hecht betekenis aan de uitspraken van de vorm $a/b = c$. Onder $a/b = c$ verstaat hij: c is *het* getal, waarvoor $a = bc$. Of uitvoeriger:

er is precies één getal x, waarvoor $a = bx$, en dit getal is gelijk aan c.

Nu is inderdaad $\frac{3}{0} = 4$ een onware bewering, omdat er niet precies één getal x bestaat, waarvoor $3 = 0 \cdot 4$. Evenzo is $\frac{0}{0} = 0$ een onware bewering. Echter is $\frac{3}{0} \neq 4$ een ware bewering, omdat het niet waar is, dat $\frac{3}{0} = 4$.

Verder is $\frac{1}{0} \neq \frac{1}{0}$, als we aan $a/b = c/d$ als betekenis geven:

$$\exists x \cdot x = a/b \wedge x = c/d.$$

Hoewel dit alles aantrekkelijk klinkt, moeten we er toch rekening mee houden, dat we sommige denkgewoonten niet meer kritiekloos mogen volgen. Zo heeft men de neiging uit

$$\tfrac{3}{0} \neq 4$$

te concluderen

$$\exists x \cdot x \neq 4 \wedge \tfrac{3}{0} = 4.$$

Hetgeen echter niet juist is.
We zijn gehecht aan de implicatie

$$a = c \wedge b = d \Rightarrow a/c = b/d.$$

Hetgeen echter voor $a = b = 1$ en $c = d = 0$ helaas niet meer klopt.
Ook is $\neg\, A > B$ niet langer gelijkwaardig met $A \leqslant B$. Heeft namelijk A of B 'geen betekenis' (d.w.z. geen betekenis volgens onze gewone definities), dan is $A > B$ waar en dus $\neg\, A > B$ onwaar. Anderzijds zijn $A = B$ en $A < B$ beide onwaar en is dus ook $A = B \vee A < B$ onwaar. En $A \leqq B$ is niet anders dan een verkorte schrijfwijze voor $A = B \vee A < B$. Zodat dus tegelijk $\neg\, A > B$ waar en $A \leqslant B$ onwaar zou zijn.
Met de oplossing van Pickert ben ik dus nog niet zonder meer gelukkig; al vind ik het zeer de moeite waard er kennis van te nemen.
Ten slotte enkele didactische conclusies. Het lijkt mij niet aan te bevelen bij het behandelen van de implicatie waarheidstabellen te gebruiken om de betekenis van de implicatie toe te lichten. Daarentegen zou ik willen aanbevelen de nadruk erop te leggen, dat $p \Rightarrow q$ betekent: uit p is q deduceerbaar.
De betekenis van de implicatie komt dan overeen met de betekenis, die het natuurlijke verstand eraan hecht. Implicatie is voor de leerling niets bijzonders. De op het oog zonderling aandoende nevenverschijnselen, die optreden bij de behandeling van de implicatie door middel van waarheidswaarden, treden nu niet op.
We hebben echter één verschil geconstateerd tussen de reacties van het natuurlijke en van het theoretische verstand op de implicatie. Bij het natuurlijke verstand gaat het rode licht branden, zodra de informatie contradictoor blijkt te zijn. Theoretisch blijkt het noodzakelijk te zijn in sommige gevallen een conclusie te trekken uit informatie, waarvan de contradictoriteit al gebleken is. Het voorbeeld van Holvoet maakt dit duidelijk.
Ik zou dit artikel willen besluiten met een vraag. Het voorbeeld van Holvoet is leuk, maar erg gekunsteld. Komen dergelijke situaties ook voor in minder gekunstelde vorm? Is het noodzakelijk reeds bij het vwo de leerling ermee in contact te brengen of hebben we hier te maken met een vorm van deductie,

die zonder schade uit ons onderwijs geweerd kan worden? Is het een redeneermethode voor fijnproevers en kan de behandeling gerust uitgesteld worden tot later, als men bij het wetenschappelijk onderwijs de behoefte aan deze denkmethode ondervindt. Ik heb de neiging behandeling bij het vwo luxe te vinden. Ik houd mij voor tegenspraak echter gaarne aanbevolen.

Naschrift

Inmiddels ben ik zelf een voorbeeld tegengekomen. In klasse 5β (experimenteel programma) behandelde ik puntsymmetrie.
Vraag. Zijn er vlakke figuren met meer dan één middelpunt?
Antwoord. Ja, Π (het gehele vlak).
Het antwoord kwam onverwachts voor mij. Hierdoor gestimuleerd kwam ik van het een op het ander. De verzameling Π heeft als bijzonderheid, dat elk punt van het vlak er middelpunt van is. Is er nog een verzameling (deelverzameling van Π) met deze eigenschap?
Geen antwoord.
Laat V een deelverzameling van Π zijn met de eigenschap, dat elk punt van Π er middelpunt van is. Onderstel, dat ten minste één punt P element van V is. Bewijs dan, dat voor elke $Q \in \pi$ ook geldt $Q \in V$. M.a.w., dat $V = \Pi$. Met enige moeite werd een bewijs gevonden.
Bij het opsporen van deelverzamelingen van Π met de eigenschap, dat elk punt van Π er middelpunt van is, behoeven we dus alleen nog maar de lege verzameling te onderzoeken. Bewering: de lege verzameling voldoet aan de gestelde eis. *Bewijs.* We moeten aantonen, dat elk punt $P \in \Pi$ middelpunt van $\varnothing$ is. D.w.z., dat uit

$A \in \varnothing$ en A' is het spiegelbeeld van A t.o.v. P

volgt

$A' \in \varnothing$.

En hier ging het betoog de mist in. Het trekken van conclusies uitgaande van $A \in \varnothing$ bleek het struikelblok; de rode lamp ging branden.
Mijn conclusie was: dit vraag ik geen tweede keer.

Korrel CLXVI

Implicatie

V en W zijn verzamelingen; p is de uitspraak $x \in V$ en q de uitspraak $x \in W$. We kunnen nu op de bekende manier een correspondentie ontwerpen tussen uitspraken en verzamelingen:

met p correspondeert $\{x|p\}$, dus V,
met q $\{x|q\}$, dus W,
met $p \vee q$ $\{x|p \vee q\}$, dus $V \cup W$,
met $p \wedge q$ $\{x|p \wedge q\}$, dus $V \cap W$.
Nu $p \rightarrow q$. We weten, dat $p \rightarrow q$ betekent $\neg p \vee q$ (het is mij om het even, of dit per definitie vastgesteld wordt of op grond van waarheidstabellen). Met $p \rightarrow q$ correspondeert dus $\{x|p \rightarrow q\}$ of $\{x|\neg p \vee q\}$ en dat is de verzameling $V^c \cup W$.

Tot nog toe hebben we uitgaande van de beide verzamelingen V en W nieuwe verzamelingen gevormd. Nu is het ook mogelijk over de beide verzamelingen V en W iets te beweren. Zo zouden we kunnen beweren, dat V een deel van W is, dus dat $V \subset W$.
Hiermee zal corresponderen een uitspraak over de beide uitspraken p en q. En wel:
als p waar is, dan is ook q waar
of
uit p is deduceerbaar q.
Symbolisch geschreven
$p \vdash q$
of ook wel
$p \Rightarrow q$.
Ik hoop, dat nu duidelijk blijkt hoe wezenlijk $p \rightarrow q$ (d.i. $\neg p \vee q$) verschilt van $p \Rightarrow q$ (d.i. $p \vdash q$).

P. G. J. Vredenduin
Oosterbeek

Korrel CLXVII

Cartesius – cartesisch – cartesiaans

(Een puristisch korreltje, uiting van schoolmeestersergernis.)

Elk Nederlands bijvoeglijk naamwoord dat gevormd wordt van een op '-ius' eindigende eigennaam, heeft als uitgang '-iaans'. Niemand zal dan ook de Juliaanse kalender een 'julische' noemen, een voorstel het Gregoriaans door 'gregorisch' gezang te vervangen klinkt vals in de oren, geen Arminiaan verdedigt een 'arminisch' standpunt en een Ariaan kan niet van 'arische' dwaling beticht worden.
Maar waarom dan toch wordt steeds en telkens weer het afgrijslijk germanisme 'cartesisch' produkt en soms ook 'cartesische' coördinaten gebruikt, en dat door wiskundigen, zo gevoelig voor zuiver taalgebruik?
Eén troost voor Descartes: Het 'Vreemde woorden in de wiskunde', (Prof. Dr. E. J. Dijksterhuis) maakt aan dit 'cartesisch' geen woord vuil: het kent slechts cartesiaanse coördinaten. En in de klassieke natuurkunde wil nog wel eens een 'cartesiaans duikertje' te voorschijn komen. Moge het 'cartesische' spoedig en voorgoed onderduiken.

drs. Joh. Runhaar,
Eindhoven.

Liwenagel

DRINGEND VERZOEK

Abonnees op Euclides die dit blad ontvangen als lid van Liwenagel, wordt dringend verzocht het abonnementsgeld voor de 46e jaargang zo spoedig mogelijk te voldoen door overschrijving van *f* 7,– (dus niet meer *f* 5,50!!) op postgiro 87185 ten name van de penningmeester van Liwenagel te Heemstede.
Wie aan dit verzoek voldoet en dus niet op een extra aansporing wacht, bespaart zichzelf extra kosten en de penningmeester extra moeite. Bij voorbaat dank voor de medewerking.
N.B. 'Zo spoedig mogelijk' betekent deze keer *in ieder geval in dit kalenderjaar*, dit met het oog op de te verwachten reorganisaties in de verenigingen, die groepen van het Genootschap zijn.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Agenda van de jaarvergadering op zaterdag 19 december 1970 in het 'Transitorium' van het Universiteitscentrum 'De Uithof' te Utrecht.
Aanvang: 10.30 uur

1. Opening door de voorzitter, dr. J. K. van den Briel.
2. Notulen van de algemene vergadering 1969.
3. Jaarverslagen.
4. Décharge van de penningmeester en benoeming van de nieuwe kascommissie.
5. Bestuursverkiezing wegens periodiek aftreden van drs. J. van Dormolen en M. Kindt. Het bestuur stelt beide aftredenden kandidaat.
6. Vaststelling van de contributie 1971/72.
7. Splitsing van de vergadering in twee delen.
   7.1 Voordracht van Prof. Dr. J. C. H. Gerretsen Enkele toepassingen van de Identificatietopologie.
   7.2 Voordracht van G. A. Vonk Lineair programmeren.
   Pauze
8. Voordracht van M. Sjamaar Gebruik van de overhead-projector bij het wiskunde-onderwijs.
9. Mededelingen over de didactiekcommissie.
10. Rondvraag.
11. Sluiting.

Verslag van de kascommissie

Ondergetekenden hebben heden 24 september 1970, een onderzoek ingesteld in de boeken en bescheiden van de vereniging die betrekking hebben op het verenigingsjaar 1969/1970.

Zij verklaren één en ander in orde te hebben bevonden en stellen de vergadering voor de penningmeester ter zake van zijn beheer te déchargeren.

De kascommissie,
w.g. Th. J. J. Boogaard
B. van der Meijden.

Redactieverslag 45e Jaargang van Euclides

Aan de besturen van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskunde-werkgroep van de WVO.

De 45e jaargang van Euclides had niet alleen een nieuw – goed ontvangen – uiterlijk, getracht werd ook de inhoud in overeenstemming te brengen met de gewijzigde omstandigheden: nieuwe leerstof, een kennelijk groeiende interesse in nieuwe onderwijsmethoden en de doorbreking van de grenzen tussen de verschillende soorten van onderwijs.

De reacties van de lezers waren in het algemeen gunstig. De redactie moet in dit verband opmerken dat men Euclides niet dient te zien als een tijdschrift voor wiskunde. Wordt er wel eens een artikel over een wiskundig onderwerp geplaatst dat niet direct voor de school van belang is, dan is dat meest geschied als achtergrondinformatie van de leraar.

De redactie ontving zo goed als geen wensen ten aanzien van de inhoud. Ze zou daarover gaarne door lezers geïnformeerd worden.

De open plaats in de redactie werd in het begin van het jaar ingenomen door de heer L. A. G. M. Muskens.

De regelmaat in de verschijning liet helaas te wensen over. Het is een voortdurende bron van overleg met de uitgever. Er is echter bij de redactie het vertrouwen dat de oude stiptheid weer bereikt kan worden. Overigens is het contact met de firma Wolters-Noordhoff zeer goed. De jaargang telde 400 pagina's.

Utrecht, 7 november 1970

Namens de redactie,
w.g. G. Krooshof, voorzitter,
A. M. Koldijk, secretaris.

Boekbespreking

Prof. dr. Ph. J. Idenburg, *Naar een constructieve onderwijspolitiek*, 18 blz., groot formaat; ingen. *f* 3,50; Wolters-Noordhoff, Groningen; 1970.

Idenburg analyseert de structuur van de onderwijspolitiek die tot op heden in ons land werd gevolgd. Hij beschouwt allereerst de distributieve onderwijspolitiek die paste bij een maatschappij van in zekere zin statische structuur, waarin het meer de bedoeling was de verdeling van de bevolking in standen en klassen te bevestigen dan om deze te corrigeren. De inrichting van ons ministerie van onderwijs weerspiegelt sinds 1918 deze distributieve onderwijspolitiek. De zich steeds uitbreidende verantwoordelijkheid van de staat, de groei van de kennis, de toenemende mate waarin het ontvangen onderwijs over 's mensen plaats op de arbeidsmarkt gaat beslissen, met de op gang zijnde interne en externe democratisering ook voor het schoolwezen, zijn alle factoren die een overgang van de gewraakte onderwijspolitiek naar een constructieve onderwijspolitiek bevorderen.
Idenburg geeft van de doelstellingen van deze nieuwe politiek een uitvoerige analyse. Hij constateert, dat het bestaande ministerie van onderwijs en wetenschappen de kenmerken draagt van een administratief-bureaucratische structuur. Ons schoolwezen wordt overwegend bestuurd door mensen die ter zake van het onderwijs ongeschoold zijn en die de hun toevertrouwde zaken gewetensvol doch slechts van de administratieve kant bekijken en behandelen. Er dient in het ministerie een onderwijskundige sector te komen gelijkwaardig aan de bestaande. Naast reeds bestaande instituten moet er voorts een leerplaninstituut en een onderwijstechnologisch ontwikkelingscentrum worden ingericht.
De auteur hoopt, dat de door hem voorgestelde verbeteringen het gebrek aan visie dat kenmerkend is voor onze onderwijswereld zullen doen verdwijnen en dat de modernisering van geheel ons onderwijswezen met behulp ervan tot stand zal kunnen komen.
Idenburgs pleidooi verdient de belangstelling van allen wie de belangen van ons onderwijs ter harte gaan.
Joh. H. Wansink

J. K. Hale: Ordinary differential equations, John Wiley and Sons, New York 1969, XVI+332 pp, £ 7/-/-.

Dit voortreffelijke leerboek over de kwalitatieve theorie der gewone differentiaalvergelijkingen is voortgekomen uit een langdurige ervaring aan de Brown Universiteit. Daar kunnen studenten in de toegepaste wiskunde (en ook in de zuivere wiskunde en natuurkunde) in hun derde en vierde jaar van het college van de schrijver genieten.

Inderdaad genieten, want deze beslist niet kinderachtige stof wordt met een zeldzame elegantie en didactisch talent gepresenteerd. In het algemeen is de methode van voorstellen de volgende: enkele goed gekozen voorbeelden geven de motivatie, dan volgt een met grote zorg opgezette afleiding van de belangrijkste resultaten en na enige interessante toepassingen wordt de lezer in de opgaven uitgenodigd de theorie zelf nog toe te passen op enige wel geformuleerde problemen. Deze opgaven zijn altijd de moeite waard, vaak niet eenvoudig, en dagen soms uit tot zelfstandig onderzoek, wat dan ook een van de oogmerken van de schrijver is geweest. De algemene eigenschappen van differentiaalvergelijkingen, zoals existentie, voortzetting, eenduidigheid, continuïteitseigenschappen en stabiliteit van oplossingen, alsmede grenscykels en invariante verzamelingen worden in hoofdstuk I behandeld.
Hoofdstuk II bevat een bespreking van de zeer belangrijke tweedimensionale systemen (waaronder de voor de natuurkunde belangrijke tweede orde vergelijkingen vallen). Hoofdbestanddeel is de stelling van Poincaré-Bendixson betreffende het bestaan van grenscykels. Uitvoerig beschreven toepassingen op een Lienard vergelijking illustreren het nut van de stelling. Het tweede deel van dit hoofdstuk is gewijd aan periodieke systemen. Als voorbereiding op de later te bespreken storingstheorie volgt in hoofdstuk III de theorie der lineaire systemen, d.w.z. van de vorm $\dot{z} = A(t)z$ ($z \in R \times R^n$) met bijzondere aandacht voor de (hier nog overzichtelijke) stabiliteit, de locale classificatie van oplossingen van het twee dimensionale lineaire system $\dot{x} = Ax$ (A constant) en de voor stabiliteitskwesties belangrijke zadelpunteigenschap. Dat alles bespreekt de schrijver in één semester!

De rest van het boek is in hoofdzaak gewijd aan storingstheorie.
Hoofdstuk IV: Perturbations of non-critical linear systems, hoofdstuk V: Simple oscillatory phenomena and the method of averaging, hoofdstuk VI: Behavior near a periodic orbit, hoofdstuk VII: Integral manifolds of equations with a small parameter, hoofdstuk VIII: Periodic systems with a small parameter.
Bijzonder fraai is hoofdstuk IX waarin een abstractie naar operatoren in Banachruimten wordt uitgevoerd met toepassing op problemen van periodieke oplossingen en een bewijs van de stelling van Perron-Lettenmeyer over het aantal analytische oplossingen van een lineair systeem. Het laatste hoofdstuk geeft een bespreking van stabiliteits-kwesties volgens de directe methode van Liapunov.

Alle hoofdstukken hebben een nuttige slotparagraaf, bevattende opmerkingen van diverse aard en suggesties voor verdere studie.

Het boek heeft een uitgebreide litteratuurlijst en een schamele index. De opbouw van het boek is van dien aard, dat men deze index ook best kan missen.

Natuurlijk zijn er drukfouten, en ook wel enige oneffenheden in de tekst. De lezer waarvoor dit boek bestemd is, zal deze storingen echter gemakkelijk kunnen opheffen. Bij een herdruk zouden de volgende zaken gecorrigeerd kunnen worden. Op het stofomslag 'almost perfect functions': 'almost periodic functions'; p. 1: correctie van de slordige definitie van lineaire ruimte; p. 27 lemma 4.1 wordt 'autonomous' gebruikt, welke term eerst op p. 37 verklaard wordt terwijl men hem in de index niet vindt. Iets dergelijks geldt voor het begrip eerste integraal (zie p. 270); op p. 123 regel 2 staat ten onrechte def boven het gelijkteken. Een zeer ingewikkelde manier heeft de schrijver om te zeggen dat zekere complexe getallen een reëel deel ongelijk nul hebben (zie o.a. p. 156). Onjuist is het om te spreken over $R \times R^k \times R^n$ dimensionaal (p. 226). Op p. 287 noemt men (4.11) de m-de Galerkin benadering en niet zoals hier de n-de, terwijl in de derde regel van beneden de σ_j niet-negatieve gehele getallen zijn; op p. 289 moet voor σ_j–1 gelezen worden $\sigma_j = 1$ (regel 11 van onder) en op p. 317 in de exponent λ_j in plaats van λ (regel 7 van onder). De schrijver bezigt soms een vreemd soort Latijn. Zo schrijft hij op p. 222 'modulii' i.p.v. 'moduli', op p. 229 'Cerca 1934' i.p.v. 'Circa', en op p. 253 'initial data is' i.p.v. 'initial data are'.

E. Dobber

Prof. Dr. Wilhelm Hestermeijer, *Paedagogia Mathematica*, 318 p.; ingen. DM 27.-; Ferdinand Schöningh, Paderborn, 1969.

De ondertitel van deze historische studie luidt: *Idee einer universellen Mathematik als Grundlage der Menschenbildung in der Didaktik Erhard Weigels, zugleich ein Beitrag zur Geschichte des pädagogischen Realismus im 17. Jahrhundert'.*

De studie is gewijd aan leven en werken van Weigel (†1699), hoogleraar in de wiskunde aan de universiteit te Jena, en verscheen in 1967 als dissertatie in de filosofische universiteit van de universiteit te Münster.

In zijn inleidende beschouwingen wijst Hestermeijer erop, dat we in de huidige moderniseringspogingen ten aanzien van het wiskunde-onderwijs met betrekking tot de aan algemeen-pedagogische ideeën toe te kennen betekenis een drietal groepen kunnen onderscheiden, een anti-pedagogische, een a-pedagogische en een pedagogische.

De anti-pedagogische richting erkent voor pré-universitair onderwijs alleen de belangen van het universitaire onderwijs en elimineert uit het pré-universitaire onderwijs alles wat dat universitaire onderwijs niet dient. Als representant van deze groep wordt Jean Dieudonné genoemd.

De a-pedagogische richting erkent wel pedagogisch-didactische doelstellingen, maar is van oordeel dat deze automatisch door het goede wiskunde-onderwijs bereikt zullen worden. 'Die Pädagogik ist somit der Mathematik immanent, mathematische und pädagogische Relevanz fallen zusammen'. Als representanten van deze groep worden Behnke, Steiner en de psycholoog Jean Piaget genoemd.

De derde groep tenslotte wil aan pedagogische inzichten het volle gewicht toekennen bij beslissingen over de inrichting van het wiskunde-onderwijs. Wittenberg en Wagenschein behoren tot deze groep.

Voor de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs is het gewenst, dat er intensieve samenwerking komt tussen mathematici en didactici, een samenwerking die thans nog maar al te zeer ontbreekt. 'Es fehlt das Zwiegespräch mit den Pädagogen, die Zusammenarbeit von Fachwissenschaft und Pädagogik'.

Hestermeijer laat in zijn studie uitkomen dat Weigel er in de 17e eeuw reeds naar streefde op school vanuit een technisch cijferen te komen tot wiskundige vorming. Zijn didactisch hoofdwerk, de Aretologistica, wordt besproken. Hestermeijer schetst de plaats van Weigel naast Comenius als barokpedagoog. Hij laat daarbij zien hoe zijn pansofische denkbeelden over het tot volkomenheid brengen van de gehele mensheid door het Al, in zijn werk centraal staan.

Betekenis voor de praktijk van het huidige wiskunde-onderwijs kunnen we aan Weigels werk bezwaarlijk toekennen. De historische betekenis van Weigels opvattingen voor de ontwikkeling van het schoolonderwijs op weg naar de ideeën der Verlichting worden echter duidelijk uiteengezet.

Weigel kon wel enige rehabilitatie gebruiken: Cantor schertste hem in zijn Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik nog als een onbeduidend man, die over onderwerpen schreef die hij niet of onvoldoende beheerste.

In didactische bibliotheken is Hestermeijers werk zeker op zijn plaats.

Joh. H. Wansink

Peter Roquette, *Analytic theory of elliptic functions over local fields*, Hamburger Mathematische Einzelschriften, Neue Folge, Heft 1, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1970, 90 pag., DM 30.

In dit boekje wordt de theorie van periodieke functies over locale lichamen ontwikkeld en gebruikt voor de bestudering van elliptische functielichamen. In tegenstelling met het klassieke, complexe geval kunnen niet alle, maar alleen juist de algebraische minder goed te behandelen elliptische functielichamen voorgesteld worden als lichamen van periodieke functies. Ondanks

deze beperking is de analytische theorie van waarde voor het toetsen van beweringen en het bewijzen van stellingen, die langs algebraische weg nog niet toegankelijk zijn. Aanbevolen voor specialisten.

H. W. Lenstra jr.

Walther R. Fuchs, *Moderne Wiskunde* (uit de serie 'Wegwijzers door de wetenschap', Nederlandse bewerking M. G. Beumer, Uitgever der vertaling W. Gaade n.v., Den Haag.

In de inleiding citeert de auteur uit een werk van Herman Weyl met de mededeling dat hij als lezerskring denkt aan een veel grotere kring, dan die van de geleerde specialisten. Hij bespreekt in het boek verscheidene onderwerpen uit de moderne wiskunde op een heel bijzondere manier. Hij pretendeert in het geheel niet een volledige wiskundige behandeling te geven van welk onderwerp dan ook, maar hoopt enerzijds belangstelling en begrip voor de wiskunde te wekken en anderzijds via de filosofie en de geschiedenis van de wiskunde met vele citaten uit werken van belangrijke wiskundigen ook de vakman te boeien.
Een leek zal het boek niet kunnen gebruiken om wiskunde te leren, omdat het geen 'echt leerboek' is, al kan men er heel veel wiskundige principes en ideeën uit leren. Een vakman zal het boek goed kunnen gebruiken om op een snelle en gezellige manier te weten te komen, welke wiskundigen bepaalde uitspraken gedaan hebben en aan welke, vermoedelijk wel bekende, theorieën zij hebben meegewerkt. In geen enkel mij bekend boek komen anecdoten over en citaten van zoveel verschillende wiskundigen voor.
Voor een docent in de wiskunde zijn er in verschillende hoofdstukken verrassend aardige methoden te lezen om vrij ingewikkelde wiskunde uit te leggen of in te leiden. (b.v. de wiskundige logica, moeilijkheden bij het begrip oneindig, kansberekeningen, dimensietheorie en topologie). Hierbij moet helaas opmerkt worden, dat er ook enkele onderwerpen in dit opzicht minder goed uit de verf komen (b.v. de bespreking van het continuüm, het limietbegrip, de complexe getallen en de computers, waarbij het programmeren nauwelijks aan bod komt.
Een belangrijk deel van het boek is gewijd aan de bespreking van verschillende opvattingen bij het grondslagenonderzoek. De formalistische 'school', die als ideaal der wiskunde de contradictieloze axiomatische opbouw ziet, wordt besproken o.a. met enkele ideeën van D. Hilbert. Hiertegenover plaatst Fuchs de constructivisten waaronder L.E.J. Brouwer en P. Lorenzen, die van mening zijn dat de logica van de natuurlijke taal streng gescheiden moet worden van de logica van de constructie.
De bedoeling van de dialogische definietheid van de effectief logische uitspraakvormen bij P. Lorenzen wordt met eenvoudige voorbeelden helder weergegeven.
De poging om een grote lezerskring te bereiken is bijzonder origineel, maar heeft natuurlijk het bezwaar, dat enerzijds vakmensen zich soms zullen ergeren aan te uitvoerige toelichtingen bij sommige delen en misschien ook wel aan te veel gepopulariseer, terwijl anderzijds leken hier en daar wel erg veel nieuwe begrippen en voorbeelden te verwerken krijgen. Zo wordt in het overigens aardige hoofdstuk over kansberekeningen, midden in de bespreking van de kans om met 2 dobbelstenen in totaal 7 ogen te gooien een voorbeeld over de kans op kruis of munt bij het tossen ingelast.
Andere onderwerpen, die in het boek in meer of mindere mate besproken worden zijn o.a. de verzamelingenleer, structurele beschouwingen, het begrip aftelbaar en kardinaalgetal, grondbegrippen der speltheorie, groepentheorie en tralies, analyse, wijsbegeerte der wiskunde en mechanica.
In het boek zijn bizonder veel illustraties opgenomen, die mede door fraaie kleuren vaak verhelderend werken. Helaas zijn ook vele illustraties overdreven fraai uitgevoerd, waardoor de bedoelingen ervan vertroebeld zijn. Ook vrees ik dat de overmaat aan 'mooie plaatjes' het werk extra duur hebben gemaakt, waardoor dit originele werk niet bij vele liefhebbers, voor wie het nuttig zou zijn, terecht zal komen.

J. van Lint

Didactische literatuur

uit Buitenlandse Tijdschriften

The Mathematical Gazette, 385–388, oktober 1969–mei 1970.

C. A. Coulson, On liking mathematics;
J. H. Branfield, On investigation;
R. H. Cobb, The game of relaxations;
S. N. Collings, Cyclic collineations of period three;
E. A. M., Powerful numbers;
A. M. Gillings, Antelope – an amendment.

A. E. Lawrance, Playing with probability;
A. J. Cole and A. J. T. Davie, A game based on the Euclidean algorithm and a winning strategy for it;
P. R. Buckland, The mathematical background of teachers in training;
G. Goldstein, A classroom approach to stock control;
J. E. Phythian, Economical number bases;
D. V. Anderson, The deviation test;
T. S. Blyth, Evaluating determinants by pivotal condensation;
E. J. F. Primrose, Some generalisations of the Pascal triangle;
F. R. Watson, XIth international mathematical olympiad, Bucharest 1969.

W. W. Sawyer, Notes on matrices;
F. J. Budden, On functions which form a group;
F. Rhodes, A geometric quality for two metrics for the co-ordinate plane;
S. Fowlie, An axiomatic basis for vectors;
E. B. C. Thornton, Function;
N. T. Gridgeman, Lamé ovals;
B. D. Bunday, The growth of elephant herds;
P. Reynolds, Hand calculators: a 1969 report on their use in schools.

K. S. Snell, Introduction to directed numbers;
D. Watson, On scoring by games;
R. L. Goodstein, On sums of progressions of positive integers;
M. Norgate, Non-convex pentahydra;
M. Holt, Maths for tomorrow's children;
G. Matthews, Cards, modules and kits;
R. G. Beerensson, On the equations $x^n \pm y^n = z^m$.

Recreatie

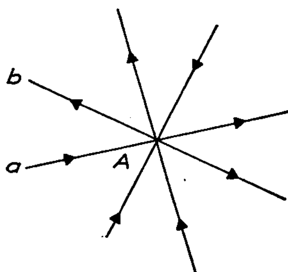
Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

250 A en B spelen 'ganzebord', maar ietwat gemodificeerd. De pot is bij 62. B begint en legt de dobbelsteen op een door hem te bepalen aantal ogen. A kantelt de dobbelsteen en gaat zoveel plaatsen vooruit als de dobbelsteen ogen aanwijst. Daarna kantelt B de dobbelsteen. A kantelt weer en gaat het aantal plaatsen vooruit, dat de dobbelsteen aanwijst. Terugkantelen mag niet. Wordt b.v. de dobbelsteen van 6 op 3 gekanteld, dan mag de volgende speler niet de steen weer van 3 op 6 kantelen. A wint, als hij 62 bereikt, en verliest, als hij gedwongen is de dobbelsteen zo te kantelen, dat hij voorbij 62 komt. Wint of verliest A bij optimale strategie? (B gaat dus niet met een gans over het bord, maar beperkt zich tot kantelen.)

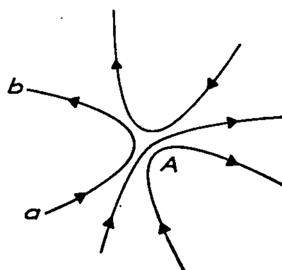
251 Plaats 13 bomen in 9 rijen van 4. (R. Kooistra)

Oplossingen

248 In een stad, waarin in elk punt een even aantal straten samenkomen, moet eenrichtingsverkeer ingesteld worden zo, dat men vanuit elk punt elk punt kan bereiken en dat nergens twee verkeersstromen elkaar kruisen. Idem als ook een oneven aantal straten in een punt kunnen samenkomen en tweerichtingsverkeer toegestaan is.
Eerst het geval, dat in elk punt een even aantal straten samenkomen. Kies een doorlooprichting van de straten zo, dat de gehele stad in één trek precies eenmaal doorlopen wordt. In A zal dus in vier straten het verkeer naar A toe in en vier het verkeer van A afgericht zijn. Kies twee opvolgende straten, waarin het verkeer naar A en van A afgericht is, b.v. a en b. Wijzig zo nodig de doorlooprichting zo, dat men van a komende naar A volgens b verdergaat. Door iteratie van dit proces bereikt men, dat nergens twee verkeersstromen elkaar kruisen. Zie fig. 1a (oude toestand) en fig. 1b (nieuwe toestand).

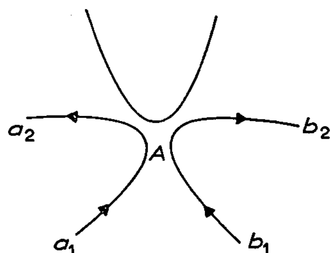


FIGUUR 1a

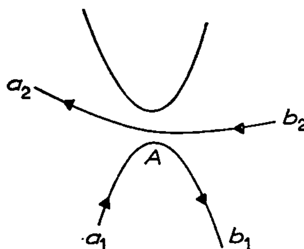


FIGUUR 1b

Nu behoeft het verkeersnet niet meer samenhangend te zijn. Het kan dus zijn, dat men vanuit sommige punten andere niet meer bereiken kan. Laten in A b.v. a_1, a_2 en b_1, b_2 tot niet samenhangende delen van het verkeersnet behoren. Draai nu de richting van het net, waartoe b_1, b_2 behoort, (zo nodig) om en verbind daarna a_1 met b_1 en a_2 met b_2. Zie fig. 2a en 2b. De samenhang is hiermee hersteld. Iteratie van dit proces levert het gewenste eindresultaat.



FIGUUR 2a



FIGUUR 2b

Nu het tweede geval. Onderstel, dat in A en in B een oneven aantal straten samenkomen. Verdubbel een straat van A naar B, d.w.z. laat in die straat tweerichtingsverkeer toe. Het probleem is dan tot het voorgaande gereduceerd.

249 A en B spelen ganzebord. Het bord heeft n vakken. Gespeeld wordt met één gans. Deze begint op vak 0 en wordt beurtelings door A en B 1, 2, 3, 4 of 5 vakken vooruitgezet. Winnaar is degeen, die de gans op vak n plaatst of de ander het verder spelen onmogelijk maakt, doordat de gans op $n-1$ staat en niet 1 verschoven mag worden. Wie wint, hangt af van n. Hoe?

We noemen p een verliezend veld, als degeen, die aan zet is als de gans op veld p staat, noodzakelijk verliest.

Het veld $n-7$ is een verliezend veld. Is b.v. A aan zet en zet hij de gans 1 vooruit, dan antwoordt B met de gans 3 vooruit te zettten en wint B. Zet hij de gans een ander aantal plaatsen vooruit, dan wint B direct.

Het veld $n-13$ is verliezend. Staat A op dit veld en zet hij de gans 1, 2, 4 of 5 vooruit, dan zet B hem 5, 4, 2 resp. 1 vooruit en staat A verloren. Zet A de gans 3 vooruit, dan zet B hem 5 vooruit. Waarna B wint.

Het veld $n-20$ is verliezend. Staat A op dit veld en zet hij de gans 2, 3, 4 of 5 vooruit, dan verschuift B de gans naar veld $n-13$. Schuift A de gans 1 vooruit, dan schuift B hem 3 vooruit. A kan dan niet verhinderen, dat B de gans op veld $n-13$ of op $n-7$ brengt.

Zo gaat het door. De velden $n-26$, $n-33$, $n-39$, $n-46, \ldots$ zijn verliezend.

A verliest dus, als $n = 7 \vee n = 13 \vee n = 20 \vee \ldots$.

Onderstel nu, dat n een andere waarde heeft en het eerste verliezende vak 1, 2, 3, 4 of 5 is. Dan zet A de gans daarop en verliest B. Is het eerste verliezende vak 6, dan zet A de gans op 3 en bij de volgende zet op 6 of op 12. In alle andere gevallen verliest B dus.

Ad 242. Ir. Mebius (Dubbeldam) maakte mij er attent op, dat ik wel wat erg slordig omgesprongen had met de mogelijkheden. Inderdaad is het gevolgde principe wel juist, maar leidt dit tot heel veel meer mogelijkheden, Ir. Mebius vond hiervoor het aantal 998.

Inhoud